研究生教学用书

专 业 课 系 列

宏观经济的随机模型

Stochastic Models in Macroeconomics

胡适耕 著



华中科技大学出版社

研究生教学用书

专 业 课 系 列


ISBN 7-5609-3704-7

9 787560 937045 >

定价：32.80元

研究生教学用书
专 业 课 系 列

宏观经济的随机模型

胡适耕 著

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

宏观经济的随机模型/胡适耕　著

武汉:华中科技大学出版社,2006 年 8 月

ISBN 7-5609-3704-7

Ⅰ.宏…

Ⅱ.胡…

Ⅲ.宏观经济-模型分析

Ⅳ.F015

宏观经济的随机模型　　胡适耕　著

责任编辑:万亚军　　封面设计:刘　卉

责任校对:朱　霞　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:华大图文设计室

印　刷:湖北新华印务有限公司

开本:787×960　1/16　印张:20.5　字数:358 000

版次:2006 年 8 月第 1 版　印次:2006 年 8 月第 1 次印刷　定价:32.80 元

ISBN 7-5609-3704-7/F・301

内容提要

本书系统介绍了现代宏观经济理论中的随机模型方法，其基本内容分为两部分：离散时间随机模型与连续时间随机模型，以后者为主. 主要论题如下：状态偏好分析；随机差分方程与离散宏观经济模型；随机分析导论；随机增长模型；消费最优化方法与财政政策；人力资本与技术进步；投资与货币政策；就业与劳务市场等. 所有这些问题都在随机模型的框架内处理，并运用随机最优化与随机微分方程进行分析. 书中包含不少新的结果与新的方法. 它们涉及现代宏观经济分析的一些重要的热门课题. 其中部分结果取自作者本人的研究.

本书可作为高等学校经济学或数学专业研究生的教材，亦可供宏观经济分析方面的研究工作者参考.

Abstract

The purpose of this book is to provide a systematical treatment for the stochastic model methods in modern macroeconomics. The book includes two parts: discrete time stochastic models and continuous time stochastic models, and the later is the main part. The main topics are as follows: state-preference analysis; stochastic difference equations and discrete macroeconomic models; introduction to stochastic analysis; stochastic growth models; consumption optimization methods and fiscal policies; human capital and technological progress; investment and monetary policies; employment and labour market, etc. All these issues are considered in the framework of stochastic models and are analyzed by using stochastic optimization and stochastic differential equations. The book contains many new results and new methods which are the subject of great importance and much activity in the modern macroeconomical analysis. Some new results are from the work of the writer.

The book can serve as textbook for graduate students in economic or mathematical department. It can also be consulted by researchers in macroeconomical analysis.

写在“研究生教学用书”出版15周年前岁

“接天莲叶无穷碧，映日荷花别样红。”今天，我国的教育正处在一个大发展的崭新时期，而高等教育即将跨入“大众化”的阶段，蓬蓬勃勃，生机无限。在高等教育中，研究生教育的发展尤为迅速。在盛夏已临，面对池塘中亭亭玉立的荷花，风来舞举的莲叶，我深深感到，我国研究生教育就似夏季映日的红莲，别样多姿。

党的十六大报告以空前的力度强调了“科教兴国”的发展战略，强调了教育的重大作用，强调了教育的基础性全局性先导性，强调了在社会主义建设中教育的优先发展的战略地位。从报告中，我们可以清楚看到，对高等教育而言，不仅赋予了重大的历史任务，而且更明确提出了要培养一大批拔尖创新人才。不言而喻，培养一大批拔尖创新人才的历史任务主要落在研究生教育肩上。“百年大计，教育为本；国家兴亡，人才为基。”国家之间的激烈竞争，在今天，归根结底，最关键的就是高级专门人才，特别是拔尖创新人才的竞争。由此观之，研究生教育的任务可谓重矣！重如泰山！

前事不忘，后事之师。历史经验已一而再、再而三地证明：一个国家的富强，一个民族的繁荣，最根本的是要依靠自己，要以“自力更生”为主。《国际歌》讲得十分深刻，世界上从来就没有什么救世主，只有依靠自己救自己。寄希望于别人，期美好于外力，只能是一种幼稚的幻想。内因是发展的决定性的因素。当然，我们决不应该也决不可能采取“闭关锁国”，自我封闭，固步自封的方式来谋求发展，重犯历史错误。外因始终是发展的必要条件。正因为如此，我们清醒看到了，“自助者人助”，只有“自信、自尊、自主、自强”，只有独立自主，自强不息，走以“自力更生”为主的发展道路，才有可能在向世界开放中，争取到更多的朋友，争取到更多的支持，充分利用好外部的各种有利条件，来扎扎实实地而又尽可能快地发展自己。这一切的关键就在于，我们要有数量与质量足够的高级专门人才，特别是拔尖创新人才。何况，在科技高速发展与高度发达，而知识经济已初见端倪的今天，更加如此。人才，

高级专门人才，拔尖创新人才，是我们一切事业发展的基础。基础不牢，地动山摇；基础坚牢，大厦凌霄；基础不固，木凋树枯；基础深固，硕茂葱绿！

“工欲善其事，必先利其器。”自古凡事皆然，教育也不例外。教学用书是“传道授业解惑”培育人才的基本条件之一。“巧妇难为无米之炊”。特别是在今天，学科的交叉及其发展越来越多及越快，人才的知识基础及其要求越来越广及越高，因此，我一贯赞成与支持出版“研究生教学用书”，供研究生自己主动地选用。早在1990年，本套用书中的第一本即《机械工程测试·信息·信号分析》出版时，我就为此书写了个“代序”，其中提出：一个研究生应该博览群书，博采百家，思路开阔，有所创见。但这不等于他在一切方面均能如此，有所不为才能有所为。如果一个研究生的主要兴趣与工作不在某一特定方面，他也可选择一本有关这一特定方面的书作为了解与学习这方面知识的参考；如果一个研究生的主要兴趣与工作在这一特定方面，他更应选择一本有关的书作为主要的学习用书，寻觅主要学习线索，并缘此展开，博览群书。这就是我赞成要为研究生编写系列的“研究生教学用书”的原因。今天，我仍然如此来看。

还应提及一点，在教育界有人讲，要教学生“做中学”，这有道理；但须补充一句，“学中做”。既要在实践中学习，又要在学习中实践，学习与实践紧密结合，方为全面；重要的是，结合的关键在于引导学生思考，学生积极主动思考。当然，学生的层次不同，结合的方式与程度就应不同，思考的深度也应不同。对研究生特别是对博士研究生，就必须是而且也应该是“研中学，学中研”，在研究这一实践中，开动脑筋，努力学习，在学习这一过程中，开动脑筋，努力研究；甚至可以讲，研与学通过思考就是一回事情了。正因为如此，“研究生教学用书”就大有英雄用武之地，供学习之用，供研究之用，供思考之用。

在此，还应进一步讲明一点。作为一个研究生，来读“研究生教学用书”中的某书或其他有关的书，有的书要精读，有的书可泛读。记住了书上的知识，明白了书上的知识，当然重要；如果能照着用，当然更重要。因为知识是基础。有知识不一定有力量，没有知识就一定没有力量，千万千万不要轻视知识。对研究生特别是博士研究生而言，最为重要的还不是知识本身这个形而下，而是以知识作为基础，努力通过某

种实践，同时深入独立思考而体悟到的形而上，即《老子》所讲的不可道的“常道”，即思维能力的提高，即精神境界的升华。《周易·系辞》讲了：“形而上谓之道，形而下谓之器。”我们的研究生要有器，要有具体的知识，要读书，这是基础；但更要有“道”，更要一般，要体悟出的形而上。《庄子·天道》讲得多么好：“书不过语。语之所贵者意也，意有所随。意之所随者，不可以言传也。”这个“意”，就是孔子所讲的“一以贯之”的“一”，就是“道”，就是形而上。它比语、比书，重要多了。要能体悟出形而上，一定要有足够数量的知识作为必不可缺的基础，一定要在读书去获得知识时，整体地读，重点地读，反复地读；整体地想，重点地想，反复地想。如同韩愈在《进学解》中所讲的那样，能“提其要”，“钩其玄”，以达到南宋张孝祥所讲的“悠然心会，妙处难与君说”的体悟，化知识为己之素质，为“活水源头”。这样，就可驾驭知识，发展知识，创新知识，而不是为知识所驾驭，为知识所奴役，成为计算机的存储装置。

这套“研究生教学用书”从第一本于1990年问世以来，到明年，就经历了不平凡的15个春秋。从研究生教育开始以来，我校历届领导都十分关心研究生教育，高度重视研究生教学用书建设，亲自抓研究生教学用书建设；饮水思源，实难忘怀！“逝者如斯夫，不舍昼夜。”截至今天，“研究生教学用书”的出版已成了规模，蓬勃发展。目前已出版了用书69种，有的书发行了数万册，有22种分别获得了国家级、省部级教材奖、图书奖，有数种已为教育部列入向全国推荐的研究生教材，有20种一印再印，久销不衰。采用此书的一些兄弟院校教师纷纷来信，称赞此书为研究生培养与学科建设做出了贡献。我们深深感激这些鼓励，“衷心藏之，何日忘之？！”没有读者与专家的关爱，就没有我们“研究生教学用书”的发展。

唐代大文豪李白讲得十分正确：“人非尧舜，谁能尽善？”我始终认为，金无足赤，物无足纯，人无完人，文无完文，书无完书。“完”全了，就没有发展了，也就“完”蛋了。江泽民同志在党的十六大报告中讲得多么深刻：“实践没有止境，创新也没有止境。”他又指出，坚持“三个代表”重要思想的关键是与时俱进。这套“研究生教学用书”更不会例外。这套书如何？某本书如何？这样的或那样的错误、不妥、疏忽或不足，必然会有。但是，我们又必须积极、及时、认真而不断地加以改进，与时俱进，奋发前进。我们衷心希望与真挚感谢读者与专家不吝指教，及时批

评。当局者迷，兼听则明；"嘤其鸣矣，求其友声。"这就是我们肺腑之言。当然，在这里，还应该深深感谢"研究生教学用书"的作者、审阅者、组织者（华中科技大学研究生院的有关领导和工作人员）与出版者（华中科技大学出版社的编辑、校对及其全体同志）；深深感谢对"研究生教学用书"的一切关心者与支持者，没有他们，就决不会有今天的"研究生教学用书"。

我们真挚祝愿，在我们举国上下，万众一心，在"三个代表"重要思想的指引下，努力全面建设小康社会，加速推进社会主义现代化，为实现中华民族伟大复兴，"芙蓉国里尽朝晖"这一壮丽事业中，让我们共同努力，为培养数以千万计高级专门人才、特别是一大批拔尖创新人才，完成历史赋予研究生教育的重大任务而做出应有的贡献。

谨为之序。

中国科学院院士
华中科技大学学术委员会主任
杨叔子
2003年7月于喻园

前　言

今天，人类比以往任何时候都在更快地创造与积累着财富．与此同时，与财富相关联的人类生活的方方面面，比以往任何时候都更加错综复杂，更难理出头绪．这就使得经济学这门受人膜拜的大学问面临前所未有的严峻挑战．说来几乎令人难以置信，远在一个（甚至两个）世纪之前，人们就声称终于发现了经济学的真谛；然而，正当人们将那些被认定要永远主宰人类社会的经济法则供奉于科学殿堂，并告诫未来的经济学家只需对已有的信条作出诠释与应用之际，伴随着现代产业狂潮，无数新的经济事实与经济问题汹涌而来，使人们重新陷入迷茫．需要解答的问题是如此之多，以至人们感到经济学已经解决的问题相形见少．

人类能怀疑自己的经济学能力吗？难道人类不是天生的经济学家，对于事关衣食利禄的问题有着近乎本能的正确判断吗？人们岂能不懂得，财富永远来自于有效的人类活动，更多的产出必定有赖于更多的投入；人们岂能不知晓，为增加供应所必要的努力应当来自需求的驱动；人们岂能不同意，技术进步乃为加快经济增长所必需，而教育又是持续推进技术所不可缺少的．不可否认，我们确实不缺乏诸如此类的知识，因为所有这些都不过是常识而已，而每个人绝不会怀疑自己作出常识判断的能力．如果常识足以解释一个复杂的世界，那么经济学就无所为用了．问题恰恰在于，常识从来都止于事物的表象，深入的理解往往超出常识之外．用人力资本替换一部分物质资本一定可行吗？对教育的投入是否应优先于对科技开发的投入？一个经济体所能承受的外来资本的最佳比例是多少？一个较高的经济增长率总胜过一个较低的增长率吗？这些问题多半难以立即作出判断，甚至经过一番思索之后仍然难于判断．否则，经济学家就不至于有那么多的歧见与争论了．应当承认，许多看来平常的问题，实际上既超出常识判断之外，也超出肤浅的经济理论所能解答的范围之外．

那么，问题的症结何在呢？

首先，与现代经济生活相关的问题更多地带有定量性质，因而人们（尤其是经营者与决策者）更希望有一个定量的解答．能有效地解答定量问题的经济学首先要将自己提升为一门定量的科学，具有如同数理科学一般的精确性，而这恰恰是传统经济学所无法达到的，更不必说日常观察的精确性了．

其次，经济学要成为精密的定量科学，除依赖于模型外别无他途．任何定量科学无论多么高深莫测，其实只是揭示互相依存的变量之间的联系规律而已．从根本上说，定量科学只能处理相对简单的理想系统，或者已经在某种简化处理中

充分理想化了的实际系统．而问题在于，无论用什么标准来衡量，令人眼花缭乱的现实经济系统都太复杂了，它们包含的变量太多，人们在试图将其作某种简化时，常不免陷于茫然失措．现代理论经济学家必定会固执地坚持自己的理念：他们将只是分析一个充分理想化的经济，而不是直接分析某个现实的经济原型，除非完全放弃定量分析的要求．在经济学家的工具箱中，并无同时对付无限多个变量的有效工具，而未经简化的现实经济系统本质上包含有无限多个变量．这就注定了现代经济学家在分析一个经济系统之前，首先要将其转化为某个高度理想化的模型．

即使在一个充分简化的模型之内，诸变量之间的因果关系也往往隐蔽难寻，非直接观察所能发现．如果变量 A 通过变量 $A_1, A_2, \cdots$ 这一长长的逻辑链条而最终作用于变量 B，那么 A 与 B 之间的逻辑关系就完全消失在纷繁的表象中，几乎不在经验归纳所及的范围内留下什么踪迹，因而必然逸出常识审察的视野之外．这就决定了主要依赖于经验归纳的传统方法不足以解决现代经济学的问题．经济学能成为一门精确的定量科学，在很大程度上在于它决然地使用科学演绎法；而循这一途径趋于极致，最终就将自己变成了一门数理科学，变成了一门依据定义、命题、证明、推论这一套标准程序展开的学科．今天，经济学如此深地陷入数学化的旋涡是经济学的先行者们始料未及的．经济学家能抱怨这一现状吗？经济学毕竟是极大的受益者，它比以往任何时候都更方便地利用数学方法的权威性，利用人们对数学真理性的近乎绝对的信任．

此时此刻就要小心了．无论数学方法如何完美无缺，都不足以保证以数学为工具的经济学免于出错．不过，就是在这一点上，数学方法仍然具有无与伦比的优势：它能准确地告诉你，如果某条经过证明的经济学命题与现实不符，那么为此该承担责任的并不是数学推理过程，而是推理所依据的假设．经济学家之间常常因彼此不认同对方的结论而争论不休，但很少会质疑他人用了错误或不精确的推理，而通常只是批评他人用了不现实的假定，或者用了不合理的模型，或者用了有疑问的数据．而这种批评唯有促使经济学家更谨慎地选择自己的模型与假定，而不是整个地抛弃自己的方法．不同意我的结论吗？那很好，且让大家一起来探讨一下我的结论据以推出的模型与假设该如何修改．这就使经济学获得了一种前所未有的自我更新与自我完善机制．仅仅这一点，现代经济学就值得给予高度肯定了．今天，经济学比以往任何时候都更生机勃勃，几乎每天都在改变面貌．它已不再将一些来自直接归纳的结论宣布为绝对真理，只承认“在某个条件下必有某个结论”这样的相对真理；它也不再在今天自诩为伟大发现而明天就被判定为过时，承认自己远未完善，仍处于不断更新之中．没有哪一条现代经济学结论值得奉为金科玉律．但用方程与公式表达的经济学命题将越来越准确地刻画现实的经济关系，有越来越可信的预报力，完全可以抱有信心，而这也就够了．

如果说现代经济学将数学方法作为不可缺少的工具已经没有疑义，那么需要明确指出的只是，仅当经济系统纳入到一个用数学语言与数学公式表达的系统之内时，数学的分析方法才有用武之地. 这就是说，数学方法的运用必须以建立数学模型为其前提. 这就触及了本书的主题. 经济系统建立数学模型并非经济学的目的，而只是获得所需结论的手段. 手段是可作不同选择的，经济模型也就必然多种多样. 但有一类模型，即本书要详细论述的动态随机模型，近年来获得了异乎寻常的重要性；它所呈现的强大生命力似乎预示着，在未来一段时间内，它将是现代经济学的一个不可或缺的有力工具.

动态随机模型出现的历史并不长，有关它的最早一批文献与 Merton，Brock，Lucas，Eaton，Gertler，Grinols，Turnovsky 等人的名字联系在一起. 作为一种发展过程，经济系统必然在其运行中表现出自身的规律性. 因此，经济系统按其本性而言必然是一个动态系统，这是不言而喻的. 至于经济系统的随机性或不确定性，则是一个更复杂的问题，只是近几十年来才受到足够的注意. 其实，不确定性并不远离我们的常识. 在日常经验中，我们所体验到的不确定性一点也不比确定性少. 我们无法确知，某一商品在明天的价格是多少；我们也不完全知道，投向市场的每一分钱未来将得到什么样的回报. 正因为如此，我们才感到市场充满了不测，才认为市场是一种无法驾驭的、令人生畏的力量. 人们不免会问：市场何以不确定？如果事实总逃不过因果法则，那么在一定条件下市场不应有由因果律决定的确定轨道吗？在我们看来的不确定实际上也许仅仅是不确知而已. 对于未来事物的无法确知，也许仅仅是我们缺少关于某些隐蔽因素的信息；随着我们拥有信息的增加，本来认为不确定的东西将逐步加入到确定事物的行列中来，在我们深入探索的行进中，不确定性或许会不断退缩以至消失；或许我们会终于发现，不确定性原不过是认知上的一种错觉，是人类在知识欠缺的无奈中的一种托词——无论事实是否如此，有一点是肯定的：我们永远无法把握一个系统的方方面面，因而注定无法完全摆脱不确定性. 对于我们来说，重要的是如何估计不确定性并指明其后果，而不是去论证不确定性的本原，那该是哲学家的话题.

显然充满不确定性的经济系统，在很长时间内一直被当作确定性系统加以研究，并非出于误解，而是分析工具的局限所致. 正是因为忽略了不确定性，经济学家们才能运用他们所熟悉的微分方程、最优控制等数学工具对之进行分析. 因此，直至上世纪中叶，经济模型还主要是确定性模型. 处理不确定性所需要的数学理论，首先是概率论与数理统计，已有很长的历史. 但将概率论与动态系统理论结合起来的随机微积分、随机微分方程及随机最优化，或者如通常所简称的随机分析，则是较晚近才出现的. 这一新的数学工具一出现，就立即被一些经济学家用来研究经济与金融理论中的复杂问题，且获得了出人意外的成功，因而吸引了愈来愈多经济学家的注意. 或许，在经济学家看来，随机分析正是他们期待已

久而终于发现的分析工具. 时至今日,虽然尚不能说随机分析已成为多数经济学家手中得心应手的工具,但应用随机分析的经济学文献确已多到无法统计的地步.

随机微积分、随机微分方程及随机最优化这样一些经济学家曾经感到陌生的概念,实际上不过是对应的确定性概念的某种自然推广. 在最简单的意义上可以说,附加某个随机扰动项,就从传统的分析概念过渡到了与之对应的随机分析概念;而依问题的实际背景,对于扰动项可作出自然的直观解释. 从确定性到随机性,这一初看起来难以逾越的鸿沟,就这样一跨而过了,似乎并没有人们想像的那么困难. 这种印象并不准确,但有其好处,也许只有这样,新方法才更容易被人接受. 但如果新方法并不能带来令人震撼的新结果,其价值就可疑了. 因而我们将特别关注这样的问题:随机扰动的加入在多大程度上及以何种方式改变了系统的性质? 显然,这也是经济系统的观察者与监控者力图了解的问题. 本书提供的材料表明,这方面不乏颇具吸引力的结果.

本书的大多数模型都具有如下标准形式:决策者(代表性个体、决策部门或虚拟的社会计划者)在其预算约束条件下最大化其目标值,而目标值通常是无限时间跨度内的期望折现效用或折现利润. 这样的模型通常称为跨时最优决策模型,它已成为动态宏观经济模型的标准形式. 从具体操作的角度考虑,随机模型方法的具体实施由以下三个步骤组成.

(i) **建模**,即建立解决给定问题所需要的随机模型. 在这一点上,文献中已有许多出色的模型可资借鉴,其中一些具有基本价值的著名模型,今天仍然是人们研究并力图加以发展的对象. 如已提及的,一个成功的模型建立在对系统适当简化的基础上. 一个自然的问题是,我们如何知道所作的简化是否过了头? 可以想见,建模时的斟酌必定大费思量. 而且也不要指望所建立的模型能达到理想中的完善,任何模型都只是兼顾简单性与现实性的一个折衷结果,它永远留有改进的余地.

(ii) **解模型**. 就一个跨时最优决策模型而言,从字面上看,所谓解模型,是指求出问题的最优控制函数与状态变量的最优轨道. 可惜,即使对于不很复杂的模型,这件事也未必能准确做到. 这就使得对"解模型"这一任务有一个更现实的理解. 本书涉及的模型大多是为解释宏观经济系统的长期趋势而设计的,因而我们真正关注的是那些刻画系统长期趋势的数量指标,这些指标通常称为均衡值,它们应当能由模型确定得出来. 在大多数情况下,解模型的主要任务就是求出这些均衡值;至少,求出这些均衡值所满足的尽可能简单的方程,从而有可能运用这些方程去分析均衡值的性质或近似地算出均衡值.

(iii) **参数分析与政策分析**. 均衡值依赖于外生地给定的模型参数;模型参数反映了经济系统的结构、市场条件与政府的政策选择,为决策者与研究者所密

切关注. 阐明参数对于均衡值的作用,是模型分析的基本目的,甚至是主要目的. 可以考虑三类结论:均衡值与参数关系的性质(正相关性或负相关性);均衡值对参数变化的敏感程度;确定参数的最优值. 政策参数的最优值反映了政策制定者的最优选择,其价值是不言而喻的.

一般而言,从模型分析的结论中能否得到所关注的问题的答案,正是对模型成功与否的一个检验. 模型分析的结论并非都是有价值的,其中必然包含了大量虽然正确但属平凡的结论,这类结论即使从常识看来也确定无疑,因而不使人感兴趣. 显然,一个结论愈超出人们的预想,就愈有吸引力;如果提不出充分的理由来否定它,那么它很有可能被证实为是一个富有价值的正确结论. 当然,结论的真实性最终依赖于实证资料的检验. 一个富有启发性的模型结论即使尚未被最终证实,也可看作是一个有意义的成果,因为它毕竟为进一步探讨提供了一个参照点. 对于一个人们期待答案的问题,如果能通过模型分析得到某种明确的结论,我们就有理由相信,通过进一步完善模型,一定能得到一个尽可能正确的结论.

经济学(或者更窄一点,宏观经济学)领域宽广而思想深邃,既令人神往,又令人敬畏. 本书作者并不自认通晓经济学. 但在这个鼓励探索的时代,一个多少熟悉分析工具而又热衷于经济问题的学者,如果不决然深入这一奇妙领域,作一番惬意的漫游与不无艰辛的探索,那就是最大的遗憾.

与本书内容相关联的文献甚多,已择其主要者集录在相关章节之末,以便于读者参考. 本书的大多数模型包含了作者本人及作者所在的“宏观经济分析讨论班”成员的工作,其中可能的错误则由作者负责. 作者对华中科技大学研究宏观经济分析的博士生讲授过书中的大部分内容,其间作者接受了不少修正意见,在此,对所有建议者表示衷心的感谢.

在本书的写作过程中得到了华中科技大学研究生院的鼓励与支持,谨表深切谢意.

作　者
2004 年 10 月

记号与约定

A：生产力参数，技术水平．

a. s. ＝几乎必然．

B,b：政府债券．

β：折现系数(用于离散模型)．

C,c：消费，成本．

cov：协方差；cov_t：t 期条件协方差．

CARA＝常数绝对风险厌恶．

CRRA＝常数相对风险厌恶．

$\mathrm{d}R_x$：资产 x 的随机回报率．

$\mathrm{d}u_x$：对变量 x 的随机扰动．

$\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$：一阶差分．

δ：折旧率；外面性指标．

E：数学期望；E_t：t 期条件期望．

ε_t：通常记白噪声．

$F(\cdot),f(\cdot)$：通常记生产函数；或分别记概率分布与概率密度函数．

G：公共开支；g：公共开支比率．

g_x：变量 x 的增长率．

$g_x(z)$：随机序列 x_t 的生成函数．

H：人力资本，Hamilton 函数．

I：投资．

$\boldsymbol{I}$：单位矩阵．

I_t：至时点 t 为止的已知信息之集．

i：名义利率．

K,k：物质资本存量．

L：延迟算子，劳动力，Lagrange 函数，就业人数．

L^2：平方可积函数(或平方可和序列)之空间．

M,m：货币存量．

N：人口．

n：人口增长率．

ODE＝常微分方程．

P,p：价格，概率.

π：利润，概率，期望通胀率.

$\mathbf{R}$：实数集；$\mathbf{R}^n$：n 维 Euclid 空间.

$\mathbf{R}_+^n$：第一象限.

$\mathbf{R}^{m\times n}$：$m\times n$ 阶实矩阵之全体.

Res：留数.

r：实际利率；通常令 $R=1+r$.

ρ：时间偏好率.

S,s：储蓄.

SDE＝随机微分方程.

$s_x(\omega)$：随机序列 x_t 的谱密度.

$\boldsymbol{\Sigma}=[\sigma_{jk}]$：协方差矩阵.

σ：相对风险厌恶系数.

σ_u^2：u 的方差.

T：税收，时期；t：时间，期.

τ：税率.

U：失业人数.

$U(\cdot)$：通常记效用函数.

$V(\cdot)$：通常记值函数.

Var：方差；Var_t：t 期条件方差.

u,v,w：通常记 Brown 运动.

w：工资，财富.

Y,y：产出或收入.

$\mathbf{Z}$：整数集；$\mathbf{Z}_+$：非负整数集.

ψ_x：变量 x 的期望增长率.

$x'=1-x,\bar{x}=x+1$，另有说明者例外.

$\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!},m\geqslant n\geqslant 0.$

$a\vee b=\max\{a,b\},a\wedge b=\min\{a,b\}.$

const：表示常数，其具体数值难以或不必写出.

∇f：函数 f 的梯度.

$\nabla^2 f$：函数 f 的 Hesse 矩阵.

$\approx$：约等于.

$\triangleq$：定义为.

$\square$：命题或结论证完.

目　　录

记号与约定 ………………………………………………………………… (i)
第1章　不确定性下的选择 ………………………………………………… (1)
　1.1　状态偏好分析 …………………………………………………… (1)
　1.2　风险投资 ………………………………………………………… (6)
　1.3　劳动合同 ………………………………………………………… (10)
第2章　离散时间随机模型 ………………………………………………… (20)
　2.1　随机序列 ………………………………………………………… (20)
　2.2　差分方程 ………………………………………………………… (32)
　2.3　消费 ……………………………………………………………… (45)
　2.4　税收与政府开支 ………………………………………………… (63)
　2.5　投资 ……………………………………………………………… (68)
第3章　随机分析初步 ……………………………………………………… (83)
　3.1　随机微积分 ……………………………………………………… (83)
　3.2　随机微分方程 …………………………………………………… (101)
　3.3　随机最优化 ……………………………………………………… (115)
第4章　连续时间随机模型 ………………………………………………… (133)
　4.1　经济增长 ………………………………………………………… (133)
　4.2　消费优化与财政政策 …………………………………………… (153)
　4.3　教育·人力资本与技术 ………………………………………… (185)
　4.4　投资 ……………………………………………………………… (208)
　4.5　货币的介入 ……………………………………………………… (225)
　4.6　小型开放经济 …………………………………………………… (236)
　4.7　就业与劳务市场 ………………………………………………… (252)
　4.8　其他问题 ………………………………………………………… (283)

第1章　不确定性下的选择

本书所考虑的随机宏观经济模型,简单说来,就是描述在不确定条件下代表性个体如何作出决策,以及这种决策的宏观经济后果. 所有模型都基于如下基本假设.

(i) 经济运动是循一定规律随时间展开的**动态过程**. 一旦初始条件给定,过程的轨道或者被完全确定,或者依一定的统计规律被确定.

(ii) 决策者是完全理性的,而且具有对于他所要控制的过程的完全知识,并在此基础上依据某种利益最大化原则选择控制变量.

(iii) 有关过程的信息是随时间逐渐展开的.

过程所经历的时间可分为三种情况:分为当前与未来两期;经历离散的时期 $t=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$; 连续地经过某区间(通常是 $[0,\infty)$)中任何时点. 依此,所研究的模型区分为静态(或一步)决策模型、离散时间模型与连续时间模型. 本章考虑的静态决策模型看来是最简单的,但它是构成其他更复杂模型的基础.

1.1　状态偏好分析

状态偏好理论是法国经济学家Arrow 于1964 年提出的,它为不确定性下的选择提供了一个适当的描述方法,因而成为基于风险抉择的各种经济理论的基础. 这一方法对于风险投资决策、劳务决策等问题的应用,已被证明是卓有成效的.

依据状态呈离散或连续分布,状态偏好理论包含两类不同的模型,二者在概念上互相对应,但其数学形式与研究方法则颇不相同. 下面主要考虑离散状态模型.

1.1.1　离散状态模型

A. 模型描述

本书在使用决策者一词时,总认定满足如下条件:

(i) "他"作为个体或机构拥有对一定事项作出选择的完全权利;

(ii) "他"具有完全的理性并对于所关注的过程拥有完全的知识;

(iii) "他"以完全同等的身份与其他同类决策者共处于一个完全的市场中.

在这个意义上决策者常被称为一个**代表性个体**.

现在设某一决策者要为未来制定一消费计划. 这一决策的复杂之处在于,对于未来的决定依赖于未来的状态,而未来的状态(在目前看来)是不确定的(此处并不界定状态的内涵). 在具体问题中,一个状态可以是一个包含多项内容的复杂事件. 例如可以说"天气好,某商品脱销,决策者健康"是一个状态. 但重要的是,不同的状态在原则上应能确切区分,而且一旦时候来到,一个状态发生与否能够明确无误地判定. 设全部可能的未来状态仅 n 种,记为 $i=1,2,\cdots,n$; 状态 i 出现的概率为 π_i, 它被看作决策者的主观概率. 于是向量 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n)^{\mathrm{T}}$ 表示状态 i 的分布律. 个体拟定一个消费[①]计划 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$, 这意味着,个体现在就决定,当未来出现状态 i 时,他确定地消费 c_i. 对应于消费计划 $\boldsymbol{c}$, 个体的期望效用为

$$v=\sum_i \pi_i U(c_i)=\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{U}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{U}=(U(c_1),U(c_2),\cdots,U(c_n))^{\mathrm{T}}$ 是个体未来的效用向量, $U(\cdot)$ 是个体的效用函数. 在本书中用到效用函数 $U(\cdot)$ 而未作说明时,总假定 $U(\cdot)\in C^2(\mathbf{R})$, 且满足条件

$$U'(\cdot)>0,\quad U''(\cdot)<0. \tag{2}$$

个体的决策目标是:在一定的预算约束(暂且设表为方程 $\varphi(\boldsymbol{c})=0$)下,最大化其期望效用 v, 即解如下最大化问题:

$$\begin{cases}\max v=\sum_i \pi_i U(c_i), & \text{(3a)}\\ \text{s.t.}\quad \varphi(\boldsymbol{c})=0. & \text{(3b)}\end{cases}$$

在数学上,问题(3)是一个通常的有限维等式约束最优化问题.

B. 最优性条件

今依照标准的Lagrange 函数法来给出问题(3)的解的条件. 作Lagrange 函数

$$L=v(\boldsymbol{c})+\lambda\varphi(\boldsymbol{c}),$$

其中 λ 是Lagrange 乘子, $v(\cdot)$ 依式(1),则问题(3)的解 $\boldsymbol{c}$ 应满足条件

$$\nabla L=\nabla v(\boldsymbol{c})+\lambda\nabla\varphi(\boldsymbol{c})=\mathbf{0}. \tag{4}$$

向量方程(4)与方程 $\varphi(\boldsymbol{c})=0$ 联立,通常(至少在原则上)可决定 $n+1$ 个未知量 $c_1,c_2,\cdots,c_n,\lambda$, 因而决定最优消费计划 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$.

条件(4)有很简单的几何解释. 在 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 空间中, $\nabla v(\boldsymbol{c})$ 与 $\nabla\varphi(\boldsymbol{c})$ 分别为曲面 $v(\boldsymbol{c})=\text{const}$ 与 $\varphi(\boldsymbol{c})=0$ 的法向量. 于是方程(4)意味着,在问题

---

① 此处的"消费"一词,应作最广义的理解,即任何为个体带来效用的行为;在具体场合,可以是投资、生产等等. 只有这样,才可将本节的模型作最广泛的应用.

(3)的解 c 处，曲面 $v(c) = \text{const}$ 与 $\varphi(c) = 0$ 相切.

如所熟知，$v(c) = \text{const}$ 就是所谓无差别曲面. 若 c 与

$$c + \Delta c = (c_1 + \Delta c_1, \cdots, c_n + \Delta c_n)^{\mathrm{T}}$$

在同一无差别曲面上，$\Delta c \neq \mathbf{0}$，则

$$0 = \sum_i \pi_i [U(c_i + \Delta c_i) - U(c_i)]$$

$$< \sum_i \pi_i U'(c_i) \Delta c_i = \nabla v(c) \cdot \Delta c \quad (\text{用函数 } U(\cdot) \text{ 的凹性}),$$

这表明无差别曲面总在其切平面的同一侧，且在离开原点的那一侧(注意 $v(c)$ 对 c 单调增)，因此无差别曲面凸向原点(见图 1.1).

若约束曲面 $\varphi(c) = 0$ 凹向原点，$c = c^*$ 满足条件(4)，则 c^* 是曲面 $\varphi(c) = 0$ 与 $v(c) = v(c^*)$ 的唯一公共点，它必为问题(3)的解.

以上分析指明了求解问题(3)的几何法；在高维情况下它未必实际可行，但至少有助于获得对问题的直观理解.

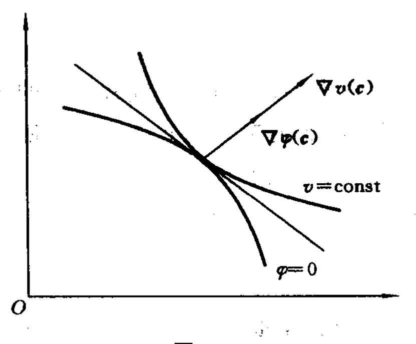


图 1.1

图 1.2

C. 确定性直线

如果个体不考虑状态的区别，他会选择一个确定性的消费计划

$$c_0 = y_0 e, \quad e = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}, \tag{5}$$

其中 y_0 是个体的全部资源，c_0 位于直线 $c = te(-\infty < t < \infty)$，此直线称为**确定性直线**.

选择 c_0 忽略了状态的差异，当然未必是最优选择，但对于决策者仍不失为一个重要的参照. 因 $v(c_0) = U(y_0)$ (依式(1)、式(5))，故个体在选择 c 时，$v(c) \geq U(y_0)$ 将是一个自然的约束，这意味着最优解 c 应在曲面 $v(c) = v(c_0)$ 的上方.

今设限制 c 在过 c_0 的某直线上，这意味着决策者须解以下最大化问题：

$$\begin{cases} \max v = \sum_i \pi_i U(c_i), & \text{(6a)} \\ \text{s.t.} \quad c = c_0 + t\alpha, & \text{(6b)} \end{cases}$$

其中 $0 \neq \alpha \in \mathbf{R}^n$，$t$ 是实参数. 直线 $c = c_0 + t\alpha$ 称为个体的**预算线**(见图1.2). 令 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\sum_i \pi_i U(y_0 + t\alpha_i)\Big]\Big|_{t=0} = \sum_i \pi_i \alpha_i U'(y_0) = (\pi \cdot \alpha) U'(y_0),$$

上式的符号即 $\pi \cdot \alpha$ 的符号. 这就表明，由 c_0 出发沿预算线作微小移动，v 的变化方向取决于 $\pi \cdot \alpha$ 的符号. 若 $\pi \cdot \alpha > 0$，则从 c_0 出发沿预算线朝 $t > 0$ 的方向移动将使 v 增加；若 $\pi \cdot \alpha < 0$，则相反. 注意

$$\nabla v(c_0) = U'(y_0)\pi,$$

π 正是曲面 $v(c) = v(c_0)$ 在 c_0 的法向量. 可见 $\pi \cdot \alpha > 0$ 与 $\pi \cdot \alpha < 0$ 分别对应当 $t > 0$ 充分小时 $c = c_0 + t\alpha$ 在曲面 $v(c) = v(c_0)$ 的上方与下方；若 $\pi \cdot \alpha = 0$，则 c_0 就是问题(6)的最优解.

1.1.2 连续状态模型

A. 一般情形

设个体所面对的未来状态 x 可能取任何实数值[①]，因而 x 是一个实随机变量. 例如，x 可以是某种商品的未来价格，或者资本的未来利率，或者个体的未来收入等等. 个体的决策问题是：选择一个状态相依的消费计划 $c = c(x)$，使其期望效用最大化. $c(x)$ 作为随机变量 x 的函数，其自身也是一个随机变量，以 $F(\cdot)$ 记其分布函数，则期望效用为(对照式(1))

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} U(c)\mathrm{d}F(c), \tag{7}$$

$U(\cdot)$ 仍为满足条件(2)的效用函数. 式(7)表明 v 完全取决于分布 $F = F(\cdot)$，因而个体的决策问题可描述为

$$\begin{cases} \max v = \int_{-\infty}^{\infty} U(c)\mathrm{d}F(c), & \text{(8a)} \\ \text{s.t.} \quad F \in \Phi, & \text{(8b)} \end{cases}$$

Φ 是某个分布函数集. 数学上，问题(8)是一个以 F 为变量的最优化问题，通常是一个无限维问题，除非对 F 的选择范围作严格限定. 对于一般的 Φ，我们无法表述问题(8)的最优性条件，更无从求其最优解.

B. 正态分布情形

不确定性决策问题通常依赖于大量微小因素的共同作用，因而正是中心极限定理发挥作用的地方. 鉴于此，在问题(8)中限制 F 为正态分布是很自然的.

以 $f(\cdot)$ 记标准正态分布密度. 若 $c \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $(c - \mu)/\sigma \sim N(0,1)$，$c$

---

① 更一般地，x 可取任意 n 维向量，因而是一个随机向量. 这一推广并不在本质上改变下面的描述.

的密度函数为 $\sigma^{-1}f[(\cdot-\mu)/\sigma]$. 以此代入式(7)得

$$v=\int_{-\infty}^{\infty}U(c)\,\frac{1}{\sigma}f\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}c=\int_{-\infty}^{\infty}U(\mu+\sigma z)f(z)\mathrm{d}z.$$

在这种特殊情形下，问题(8)可表为

$$\begin{cases}\max v=\int_{-\infty}^{\infty}U(\mu+\sigma z)f(z)\mathrm{d}z, & \text{(9a)}\\ \text{s.t.}\quad (\sigma,\mu)\in D, & \text{(9b)}\end{cases}$$

其中 D 是 (σ,μ) 平面上的某个区域.

今在 (σ,μ) 平面上考察无差别曲线 $v(\sigma,\mu)=\text{const}$. 因

$$v_{\mu}=\int_{-\infty}^{\infty}U'(\mu+\sigma z)f(z)\mathrm{d}z>0, \tag{10a}$$

$$\begin{aligned}v_{\sigma}&=\int_{-\infty}^{\infty}U'(\mu+\sigma z)zf(z)\mathrm{d}z\\&=\int_{0}^{\infty}[U'(\mu+\sigma z)-U'(\mu-\sigma z)]zf(z)\mathrm{d}z<0,\end{aligned} \tag{10b}$$

故 $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\sigma=-v_{\sigma}/v_{\mu}>0$. 另一方面，

$$\begin{aligned}v_{\mu}^{2}\frac{\mathrm{d}^{2}\mu}{\mathrm{d}\sigma^{2}}&=v_{\sigma}\frac{\mathrm{d}v_{\mu}}{\mathrm{d}\sigma}-v_{\mu}\frac{\mathrm{d}v_{\sigma}}{\mathrm{d}\sigma}\\&=v_{\sigma}\left(v_{\mu\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\sigma}+v_{\mu\sigma}\right)-v_{\mu}\left(v_{\sigma\sigma}+v_{\mu\sigma}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\sigma}\right)\\&=-v_{\mu}\left[v_{\mu\mu}\left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\sigma}\right)^{2}+2v_{\mu\sigma}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\sigma}+v_{\sigma\sigma}\right]\\&=-v_{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}U''(\mu+\sigma z)f(z)\left[\left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\sigma}\right)^{2}+2z\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\sigma}+z^{2}\right]\mathrm{d}z\\&=-v_{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}U''(\mu+\sigma z)f(z)\left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\sigma}+z\right)^{2}\mathrm{d}z>0,\qquad\text{(用式(10a))}\end{aligned}$$

可见无差别曲线是上升凸曲线. 其次，由式(10b)可以看出 $v_{\sigma}|_{\sigma=0}=0$，故 $\left.\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\sigma}\right|_{\sigma=0}=0$，可见无差别曲线从水平方向进入 μ 轴(见图1.3).

考虑一个更具体的例子. 取 $U(\cdot)$ 为CARA效用函数(参看3.3.3B)，即

$$U(c)=-\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha c}\quad(\alpha>0),$$

则依式(9a)有

$$\begin{aligned}v&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{-\alpha(\mu+\sigma z)}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-z^{2}/2}\mathrm{d}z\\&=-\frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}+\frac{\alpha\sigma}{\sqrt{2}}\right)^{2}+\frac{\alpha^{2}\sigma^{2}}{2}-\alpha\mu\right]\mathrm{d}z\\&=-\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\exp\left(\frac{\alpha^{2}\sigma^{2}}{2}-\alpha\mu\right)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^{2}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

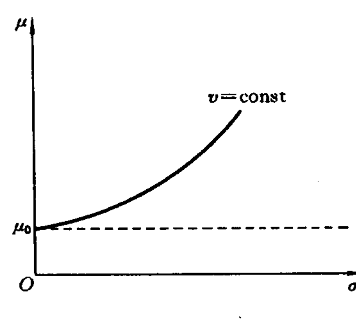


图 1.3

$$=-\frac{1}{\alpha}\exp\left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}-\alpha\,\mu\right).$$

由此可见,无差别曲线 $v=\text{const}$ 可写成

$$2\mu=\alpha\,\sigma^2+\text{const},$$

这是 (σ,μ) 平面上一族开口向上的抛物线(对照图 1.3).

若不对 D 加特别限制,问题(9)可能无解.但 v 与 σ,μ 的依赖关系已经十分清楚,要在 (σ,μ) 平面的某个给定的有限区域 D 内确定问题(9a)的解,并无原则困难.例如,设取 D 为矩形区域:$0<\sigma_0\leqslant\sigma\leqslant\sigma_1,\mu_0\leqslant\mu\leqslant\mu_1$,则因 v 与 σ 负相关,与 μ 正相关,问题(9)的解必为 (σ_0,μ_1). 若已知 $x\sim N(\mu,\sigma^2)$,设定 $c=ax+b$,则 $c\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$;与 $c\sim N(\mu_1,\sigma_0^2)$ 比较解出 a,b,得到 $c=\frac{\sigma_0}{\sigma}(x-\mu)+\mu_1$.

参 考 文 献

[1] Blanchard O J, Fisher S. Lectures on Macroecomics[M]. Cambridge: MIT Press,1990.

[2] 胡适耕,吴付科.宏观经济的数理分析[M].北京:科学出版社,2004.

[3] Malliaris A G, Brock W A. Stochastic Methods in Economics and Finance[M]. Amsterdam: North-Holland, 1982.

[4] Mankiw N G. Macroeconomics[M]. 4th ed. New York: Worth Publishers, 2000.

[5] Romer D. Advanced Macroeconomics[M]. New York: McGraw-Hill Inc., 1996.

[6] Sargent T J. Macroeconomic Theory[M]. 2nd ed. Boston: Academic Press, 1987.

[7] Takayama A. Mathematical Economics[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge Uni. Press, 1984.

1.2 风险投资

投资的回报通常依赖于未来的资产价格,因而往往带有一定风险.决策者的

目标在于选择适当的投资组合，以使其期望效用最大化. 这就使得状态偏好理论成为一个合适的分析工具. 由此而形成的投资决策理论已取得系统而深刻的进展，本节仅给出一个初步的分析，更进一步的展开可参看有关专著.

下面的讨论主要集中于离散状态情形.

1.2.1 离散状态模型

A. 模型描述

设有 m 种资产(不妨称为证券) $i(=1,2,\cdots,m)$，i 的现价为 p_i. 设个体现有资产为 y_0，若全用于购买证券 i，可购得数量 y_0/p_i. 未来可能有 n 种状态 $j(=1,2,\cdots,n)$，当状态 j 出现时，一单位证券 i 获得收益 x_{ij}，称

$$\boldsymbol{x}_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})^{\mathrm{T}}$$

为证券 i 的**收益向量**，它实际上就是收益关于状态的函数[①]. 个体的决策问题是：选择购买证券 i 的份额 θ_i，$\sum_i\theta_i=1$，以最大化其期望效用，即解如下最大化问题：

$$\begin{cases}\max v=\sum_j\pi_jU(c_j), & (1a)\\ \text{s.t.}\quad \boldsymbol{c}=(c_j)=\sum_i\theta_i(y_0/p_i)\boldsymbol{x}_i, & (1b)\\ \qquad\sum\theta_i=1, & (1c)\end{cases}$$

其中 π_j 与 $U(\cdot)$ 仍如上节.

若以 $c_j=\sum_i\theta_i(y_0/p_i)x_{ij}$ 代入式(1a)，可以看出问题(1)不过是以 θ_i 为选择变量的普通条件下的最大值问题，只是目标函数略显复杂. 下面作某些形式上的简化. 首先，不妨设 $y_0=1$ (这至多改变计价单位). 其次，令 $\tilde{\boldsymbol{x}}_i=\boldsymbol{x}_i/p_i$，它完全确定了证券 i，亦可称之为收益向量. 不妨设 $m=n$，且 $\tilde{\boldsymbol{x}}_1,\tilde{\boldsymbol{x}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{x}}_n$ 线性无关(否则，例如设 $\tilde{\boldsymbol{x}}_1$ 是 $\tilde{\boldsymbol{x}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{x}}_n$ 的线性组合，则可认为证券1是证券 $2,\cdots,n$ 的线性组合，因而可删去证券1). 于是约束条件(1b)变成 $\boldsymbol{c}=\sum\theta_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i$. 令

$$H=\left\{\sum_i\theta_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i:\sum_i\theta_i=1\right\}, \tag{2}$$

则 H 是由 $\tilde{\boldsymbol{x}}_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 生成的 $n-1$ 维超平面，称为**预算超平面**. 现在可将问题(1)简化为

$$\max_{c\in H} v=\sum_j\pi_jU(c_j). \tag{1$'$}$$

① 尽管状态 j 的出现是随机的，收益向量 $\boldsymbol{x}_i$ 却是确定的. 这表明证券 i 是一种期权，在状态 j 出现时，一单位证券 i 的持有者能确定地获得收益 x_{ij}.

与问题(1)不同，现在问题(1)′以 c_j 为变元. 设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^{\mathrm{T}}$ 是 H 的法向量，则问题(1)′可进而写成

$$\begin{cases} \max v = \sum_j \pi_j U(c_j), & \text{(1a)} \\ \text{s.t.} \quad \sum \alpha_j c_j = \text{const.} & \text{(1b)}' \end{cases}$$

原则上，α 完全可由向量 $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n$ 确定，只是其表达式不易写出.

观察到问题(1)′不过是1.1 节中问题(3)的特例，由1.1.1B 中的结论直接得出：若 $c=c^*$ 是问题(1)′的解，则无差别曲面 $v(c)=v(c^*)$ 在点 c^* 以 H 为切平面.

B. 某些结论

(i) 状态无关选择. 设个体选择 $c_0=te$，e 依 1.1 节式(5)，则 c_0 是 H 与确定性直线的交点(见图 1.4)，因而满足

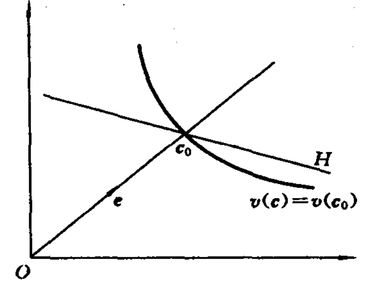


图 1.4

$$\sum_i \theta_i x_i = te, \quad \sum_i \theta_i = 1. \tag{3}$$

令 $X=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n)$，则 X 是 n 阶可逆矩阵，式(3)相当于

$$X\theta = te, \quad e^{\mathrm{T}}\theta = 1, \quad \theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)^{\mathrm{T}}.$$

由此推出 $\theta = X^{-1}(te)$，$1=t(e^{\mathrm{T}}X^{-1}e)$，因而

$$c_0 = (e^{\mathrm{T}}X^{-1}e)^{-1}e. \tag{4}$$

(ii) 无套利机会. 设新增证券 $m=n+1$，$\tilde{x}_m=x_m/p_m$，则必有 $\tilde{x}_m\in H$，这个限制使得收益向量 $\tilde{x}_m$ 不能任意选取.

证 因 X 可逆，故方程 $X\theta=\tilde{x}_m$ 必有解 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)^{\mathrm{T}}$，只要证 $e^{\mathrm{T}}\theta=\sum\theta_i=1$. 反设 $e^{\mathrm{T}}\theta\neq 1$，则用标准的线性代数方法可说明 $A\triangleq I-\theta e^{\mathrm{T}}$ 可逆. 令

$$c = X\theta + \theta_m\tilde{x}_m,$$

$$c' = X(\theta+\Delta\theta) + (\theta_m+\Delta\theta_m)\tilde{x}_m,$$

其中 θ_m 与 $\Delta\theta=(\Delta\theta_1,\cdots,\Delta\theta_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $e^{\mathrm{T}}(\theta+\Delta\theta)+\theta_m+\Delta\theta_m=e^{\mathrm{T}}\theta+\theta_m=1$，则

$$\Delta(\pi\cdot c) = \pi^{\mathrm{T}}(c'-c) = \pi^{\mathrm{T}}(X\Delta\theta+\tilde{x}_m\Delta\theta_m) = \pi^{\mathrm{T}}X(\Delta\theta+\theta\Delta\theta_m)$$

$$= \pi^{\mathrm{T}}X(\Delta\theta-\theta e^{\mathrm{T}}\Delta\theta) = \pi^{\mathrm{T}}XA\Delta\theta.$$

因 XA 可逆，故对任何充分小的 $t>0$，总可选择 $\Delta\theta$，使得 $XA\Delta\theta=t\pi$，因而

$$\Delta(\pi\cdot c) = t|\pi|^2 > 0.$$

这表明个体可通过持有证券的小量调整而不断套利. 一个完全竞争的市场对此作出的反应是：证券价格 p_i (因而 $\tilde{x}_i$)在市场力量作用下会自动调整，直至 $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_m$ 趋于同一超平面上为止. □

注意以上结论并非纯粹的数学命题，其论证依赖于一定的经济学考虑.

(iii) 期望回报率. 对于证券 i，定义其期望回报率为

$$r_i = \pi \cdot \tilde{x}_i - 1 = p_i^{-1}\Big(\sum_j \pi_j x_{ij} - p_i\Big). \tag{5}$$

r_i 刻画了一单位证券 i 的期望相对利润，仅当 $r_i > 0$ 时，购买证券 i 才是有利可图的. 若证券 i 的收益与状态无关，则 $x_i = p_i e$，此时称 i 为**无风险资产**. 对于无风险资产 i，显然有 $r_i = 0$，这样的资产称为货币. 若某种证券 i 的回报率 r_i 由零增大为一个小正数，则投资者必定增大对 i 的持有，同时必定要减少对货币的持有. 这就表明，货币持有量与风险资产的利率负相关. 在较高的利率下，投资者甚至完全抛出手中的货币. 投资者需要一定的货币，理由之一就在于，一俟时机来到，即将货币用于购买有利可图的资产. 这就是货币需求的流动性偏好解释，它首先由 Tobin(1958)提出.

C. 或有证券

这是 Arrow-Debreau 引入的一个虚拟概念，这表示收益向量为单位向量 e_i（单位矩阵的第 i 列）的证券，这种证券未必真实存在. 赋予或有证券 i 一个理论价格 q_i，使得 $e_i/q_i \in H$. 下面给出计算 $q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)^{\mathrm{T}}$ 的公式.

(i) 令 $Q = \mathrm{diag}(q_1, q_2, \cdots, q_n)$, $e_j/q_j = \sum_i a_{ij}\tilde{x}_i$, $\sum_i a_{ij} = 1$，则

$$Q^{-1} = XA, \quad A = [a_{ij}], \quad e^{\mathrm{T}}A = e^{\mathrm{T}}.$$

于是

$$q = Qe = QA^{\mathrm{T}}e = Q(X^{-1}Q^{-1})^{\mathrm{T}}e$$
$$= Q(Q^{-1})^{\mathrm{T}}(X^{\mathrm{T}})^{-1}e = (X^{\mathrm{T}})^{-1}e. \tag{6}$$

式(6)表明 q 由矩阵 X 唯一决定.

(ii) 令 $V_i = q^{\mathrm{T}}\tilde{x}_i$, $V = (V_1, V_2, \cdots, V_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$V = (q^{\mathrm{T}}X)^{\mathrm{T}} = X^{\mathrm{T}}q,$$
$$q = (X^{\mathrm{T}})^{-1}V. \tag{7}$$

注意由式(6)有 $X^{\mathrm{T}}q = e$，故 $V = e$，因而实际上式(6)与式(7)完全一致，只是导出方法不同而已.

1.2.2 连续状态模型

A. 一般情形

设未来状态 x 是一个1维随机变量. 个体将其资源 y_0 投资于安全资产1与风险资产2，其份额分别为 θ 与 $\theta' = 1 - \theta$. 资产2可看作是多种资产的某个组合. 资产1的收益与状态无关，可设为 $a\theta$，a 是某个常数. 资产2的收益与状态相依，因而是一随机变量，不妨设为 $(1-\theta)x$，于是总收益 $c = a\theta + \theta' x$ 亦是一随机变量，其中 a 与 x 不妨分别看作安全资产与风险资产的未来价格. 以 $F(\cdot)$ 记 x 的分布函数，则个体的期望效用为

$$v=\int_{-\infty}^{\infty}U(c)\mathrm{d}F(x).$$

于是个体决策问题可表为

$$\begin{cases}\max v=\int_{-\infty}^{\infty}U(a\theta+\theta' x)\mathrm{d}F(x), & \text{(8a)}\\ \text{s.t.}\quad \theta+\theta'=1. & \text{(8b)}\end{cases}$$

注意与1.1节中问题(8)不同,此处的 $F(\cdot)$ 是固定的,并非由个体选定.

B. 特殊情形

今取 $U(c)=c$,则

$$v=\mathrm{E}(a\theta+\theta' x)=a\theta+\theta'\mu,\quad \mu=\mathrm{E}x.$$

于是问题(8)成为

$$\begin{cases}\max v=a\theta+\theta'\mu,\\ \text{s.t.}\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.\end{cases}$$

必定 $\max v=\max\{a,\mu\}$,可分为以下三种情况:

(i) 若 $a<\mu$,则 $\max v=\mu$,个体选择 $\theta=0$,即全部投资于风险资产;

(ii) 若 $a>\mu$,则 $\max v=a$,个体选择 $\theta=1$,即全部投资于安全资产;

(iii) 若 $a=\mu$,则 $v=a\theta+\theta'\mu=a$ 与 θ 无关,个体可随意选定 θ.

参考文献

[1] Arrow K. The role of securities in the optimal allocation of risk bearing [J]. Rev. Eco. Studies, 1964, 31: 91-96.

[2] 胡适耕,刘金山. 微观经济的数理分析[M]. 武汉:华中科技大学出版社, 2003.

[3] Mas-colell A, Whinston M D, Green J R. Microeconomic Theory[M]. Oxford: Oxford Uni. Press, 1997.

[4] Modigliani F, Miller M H. The cost of capital, corparation finance and the theory of investment[J]. Amer. Eco. Rev., 1958, 48:261-297.

[5] Tobin J. Liquidity preference as behavior towards risk[J]. Rev. Eco. Studies, 1958, 25:65-86.

[6] 张定胜. 高级宏观经济学[M]. 武汉:武汉大学出版社,2003.

1.3 劳动合同

厂商雇用一定数量的工人从事某一产业,以期在出售产品后获得回报(利

润)，而回报依赖于不确定的未来状态(如产品出售价). 这就表明，厂商处于与风险资产投资者相类似的地位；或者不如说，厂商投入人力资本实际上是一种风险投资；因而必然与一般风险投资一样，这也正好是状态偏好理论应发挥作用的地方. 当然，劳务交易具有更特殊的形态，因而需要一个更精细的理论；这样的理论不可能在本节中系统展开. 本节所讨论的几个较简单的模型，主要用于初步解释方法的运用.

在本节中，我们总假定存在一个完全竞争的劳动市场，这意味着，其中有大量无差别的厂商与工人(在本节最后一个模型中将修正这一条件). 厂商依据期望利润最大化原则决定其雇用策略，即决定其状态相依的工人数与工资率；然后依据其决策提出一份昭示于求职工人的合同. 而工人则基于自身利益的考虑决定接受或拒绝厂商的合同. 鉴于所涉及因素的复杂性，存在从各种假定及不同角度出发的模型是很自然的.

1.3.1 Azariadis 模型

Azariadis 是最先考虑涉及不确定性的劳动合同的学者之一，他于1976年提出的"隐式合同模型"，是状态偏好理论的一个成功应用.

A. 模型描述

假定厂商与工人同时面对未来的 n 种未定状态 $j=1,2,\cdots,n,n\geqslant 2$，状态 j 出现的概率为 π_j. 无论现实中"状态"呈现的面貌有多复杂，在模型中总简化为用若干数量指标予以区分. 在此处，状态 j 的唯一标志就是未来的产品出售价 p_j，它取决于市场，不妨设

$$0<p_1<p_2<\cdots<p_n \tag{1}$$

(如果 $p_1=p_2$，状态1与2自然合而为一，不必区分了).

为突出劳动投入的作用，假定厂商的生产函数 $f(l)$ 仅依赖于雇用工人数 l. 如通常一样，假定 $f(\cdot)$ 满足条件：

$$\begin{cases} f'(\cdot)>0,\ f''(\cdot)<0, \\ f'(0)=\infty,\ f'(\infty)=0. \quad (\text{Inada 条件}) \end{cases} \tag{2}$$

以期望利润最大化为目标的厂商，选择状态相依的工人数 l_j 与工资率 w_j. 一般来说，高产品价格促使厂商扩大其生产规模，因而由条件(1)推出 $l_1\leqslant l_2\leqslant\cdots\leqslant l_n$. 厂商的期望利润为

$$V=\sum_j \pi_j[p_j f(l_j)-l_j w_j]. \tag{3}$$

从上式看来，厂商在未来必能卖出自己的全部产品已包含在模型假设之中.

工人只有两种选择：依照厂商提供的合同接受一份工作，或者完全失业. 如果工人在职，他的效用完全取决于其工资：$U=U(w)$，$U(\cdot)$ 满足1.1节中的条

件(2). 设工人能接受的最低工资为 w_0，这意味着，$U(w_0)$ 与失业工人从其补贴以及休闲中获得的效用已无差别；工资降至 w_0 以下，工人就宁可失业了.

厂商在作出决策时并不确知未来状态，因此一开始雇用最多的工人数 l_n. 一旦状态 j 出现，将有 $l_n - l_j$ 个工人被辞退；选择被辞退者是随机的，因而每个被雇工人都有 $(l_n - l_j)/l_n$ 的被辞退概率. 这样，被雇工人的期望效用为

$$v = \sum_j \pi_j \left[\frac{l_j}{l_n} U(w_j) + \frac{l_n - l_j}{l_n} U(w_0) \right]$$

$$= U(w_0) + l_n^{-1} \sum_j \pi_j l_j [U(w_j) - U(w_0)]. \tag{4}$$

存在一个由市场决定的最低效用水平 v_0；若 $v < v_0$，工人必不接受合同. 因此，厂商在提供合同时，必定要考虑到 $v \geqslant v_0$ 这一约束条件.

综上，可将厂商的决策问题表述为

$$\begin{cases} \max V = \sum_j \pi_j [p_j f(l_j) - l_j w_j], & \text{(5a)} \\ \text{s.t.} \quad v \geqslant v_0, \quad v \text{ 依式(4)}. & \text{(5b)} \end{cases}$$

这是一个通常的不等式约束最优化问题，其中 $l_j, w_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 是选择变量，而 $p_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 与 w_0, v_0 则由市场决定，在问题(5)中假定为已知.

厂商一旦依据问题(5)决定了 l_j, w_j，就形成了他的**或有生产计划**. 厂商依此计划提供一份单方面拟定的合同书向求职工人宣布，使工人明白被雇后的待遇与失业风险. 工人为减小失业风险，可能愿意接受一个较低的工资安排. 愿意接受厂商条件的工人与厂商签订合同；依据合同，一部分工人可能被解雇，这一点是工人在接受合同时已心知肚明且甘冒风险的.

B. 最优性条件

仍用1.1.1B 中的标准方法，但所得条件更为具体. 令

$$L = \sum_j \pi_j [p_j f(l_j) - l_j w_j] + \lambda(v - v_0), \quad (v \text{ 依式(4)})$$

则问题(5)的解应满足条件：

$$\begin{cases} \pi_j^{-1} \dfrac{\partial L}{\partial l_j} = p_j f'(l_j) - w_j + \dfrac{\lambda}{l_n}[U(w_j) - U(w_0)] = 0 \quad (1 \leqslant j < n), & \text{(6a)} \\ \dfrac{\partial L}{\partial l_n} = \pi_n [p_n f'(l_n) - w_n] - \dfrac{\lambda}{l_n^2} \sum_{j=1}^{n-1} \pi_j l_j [U(w_j) - U(w_0)] = 0, & \text{(6b)} \\ \pi_j^{-1} \dfrac{\partial L}{\partial w_j} = -l_j + \dfrac{\lambda l_j}{l_n} U'(w_j) = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant n), & \text{(6c)} \\ \lambda(v - v_0) = 0. & \text{(6d)} \end{cases}$$

方程组(6)包含 $2n+1$ 个方程，原则上可决定 $2n+1$ 个未知量 $l_j, w_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 与 λ. 不过，对于一个非线性方程组(况且未给出 f 与 U 的表达式)，并无求得其显式解的一般方法. 因此，我们仅满足于从方程组(6)推出某些定性结论.

首先，$\lambda=0$ 的情况应予以排除，否则从方程(6c)得出 $l_j=0(1\leqslant j\leqslant n)$，但这必非厂商的最优策略. 于是由方程(6d)得 $v=v_0$. 其次，一个很明显的结论是，从方程(6c)可直接推出

$$U'(w_j)=l_n/\lambda \quad (1\leqslant j\leqslant n)$$

与状态 j 无关. 下面令 $w=U'^{-1}(l_n/\lambda)$. 可见，一个被雇工人只要不被辞退，无论未来状态如何，都能得到稳定的工资 w. 这一结论接近于现实情况：工人承担失业风险，但并无减薪的风险；从一个工人身上获取利润降低的风险完全归于厂商.

为简化公式，约定 $U=U(w)$，$U_0=U(w_0)$，$U'=U'(w)$，$\bar{l}=\sum_j \pi_j l_j$（平均雇用工人数）. 以 $w_j=w$，$l_n/\lambda=U'$ 代入方程(6a)、方程(6b)与 $v=v_0$，得到

$$\begin{cases} p_j f'(l_j)=w-(U-U_0)/U' \quad (1\leqslant j<n), & \text{(7a)}\\ p_n f'(l_n)=w+\dfrac{U-U_0}{U'}\left(\dfrac{\bar{l}}{\pi_n l_n}-1\right), & \text{(7b)}\\ l_n v_0=\bar{l}U+(l_n-\bar{l})U_0. & \text{(7c)}\end{cases}$$

式(7a)表明 $p_j f'(l_j)(1\leqslant j<n)$ 与 j 无关，这结合式(1)及 $f'(\cdot)$ 严格单调减得出：

$$l_1<l_2<\cdots<l_{n-1}. \tag{8}$$

其次，联立方程(7b)与方程(7c)消去 $\bar{l}/l_n$ 得

$$\begin{aligned} p_n f'(l_n) &= w-\frac{U-U_0}{U'}+\frac{v_0-U_0}{\pi_n U'}\\ &= p_j f'(l_j)+\frac{v_0-U_0}{\pi_n U'}>p_j f'(l_j) \quad (1\leqslant j<n). \end{aligned} \tag{9}$$

令 $g=f'^{-1}$，则从方程(7a)与方程(9)解出

$$\begin{cases} l_j=g\left(\dfrac{w}{p_j}-\dfrac{U-U_0}{p_j U'}\right)\triangleq l_j(w) \quad (1\leqslant j<n),\\ l_n=g\left(\dfrac{w}{p_n}-\dfrac{U-U_0}{p_n U'}+\dfrac{v_0-U_0}{p_n\pi_n U'}\right)\triangleq l_n(w). \end{cases} \tag{10}$$

将式(10)代入式(7c)，得到一个仅含未知量 w 的方程：

$$\left(\frac{v_0-U_0}{U-U_0}-\pi_n\right)l_n(w)=\sum_{j=1}^{n-1}\pi_j l_j(w), \tag{11}$$

它决定最优工资 w. 若方程(11)有唯一解 $w>w_0$，则 $l_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 依方程(10)随之决定. 这样，形式上可以说已经"解出"了问题(5). 不过，方程(10)、方程(11)用于实际计算与分析并不方便，除非对 $f(\cdot)$ 与 $U(\cdot)$ 作进一步的限定.

C. 失业风险

只要某个 $l_j<l_n(j<n)$，被雇工人就存在失业风险. 若 $n>2$，则由式(8)有

$l_1 < l_{n-1} \leqslant l_n$，可见失业风险一定存在. 颇出人意外的是，$n = 2$ 的情况更复杂些，它需要一个更细致的分析.

设 $w_0 = 0$，则 $l_j = l_n (1 \leqslant j < n)$，因此失业风险不存在；$w_0 = 0$ 只能在 $n = 2$ 时发生，即 $n > 2$ 时必有 $w_0 > 0$.

证 用反证法. 设某个 $l_j < l_n, w > 0$ 是最优工资. 令

$$\tilde{l}_j = l_n (1 \leqslant j \leqslant n), \quad \tilde{w} = (\bar{l}/l_n) w < w.$$

依这个新的雇用计划 $\{\tilde{l}_j, \tilde{w}\}$，有

$$\begin{aligned}\tilde{V} &\triangleq \sum_j \pi_j [p_j f(\tilde{l}_j) - \tilde{l}_j \tilde{w}] = \sum_j \pi_j [p_j f(l_n) - l_j w] \\ &> \sum_j \pi_j [p_j f(l_j) - l_j w] = V; \qquad (\text{用式}(3)) \\ \tilde{v} &\triangleq U(0) + \tilde{l}_n^{-1} \sum_j \pi_j \tilde{l}_j [U(\tilde{w}) - U(0)] = U(\tilde{w}) = U((\bar{l}/l_n) w) \\ &> \frac{\bar{l}}{l_n} U(w) + \left(1 - \frac{\bar{l}}{l_n}\right) U(0) = v_0, \qquad (\text{用凹性与式}(7\text{c}))\end{aligned}$$

这表明依新的雇用计划能保持 $\tilde{v} \geqslant v_0$ 并能提高期望利润，从而严格地改进了最优合同 $\{l_j, w\}$，得出矛盾. 故必定 $l_j = l_n (1 \leqslant j \leqslant n)$. □

以上结论的直观解释是：若工人愿意接受任意低的工资，则厂商可最大限度地雇用较多的工人，在 $j = 1$ 出现时也不解雇工人；工人以低工资为代价获得了就业安全，而风险集中于厂商.

1.3.2 效率合同

Azariadis 模型的一个主要特点是容许工人存在失业风险，但在保住工作的情况下总能保持不变的工资. 完全可以设想，雇主可能会这样设计合同：被雇工人总能保住工作，但只能得到状态相依的工资. 下面考虑这样一个模型.

A. 模型描述

现将厂商决策问题(5)修改为

$$\begin{cases} \max V = \sum_j \pi_j [A_j f(l_j) - l_j w_j], & (12\text{a}) \\ \text{s.t.} \quad v = \sum_j \pi_j [U(c_j) - H(l_j)] \geqslant v_0. & (12\text{b}) \end{cases}$$

其中 $\pi_j, w_j, f(\cdot), U(\cdot)$ 与 v_0 仍同1.3.1 小节，$c_j = l_j w_j$. A_j 的作用类似于 p_j，但不必表示价格，只是一个反映技术与市场的未来状况的参数，如同条件(1)一样，可设

$$0 < A_1 < A_2 < \cdots < A_n. \qquad (13)$$

l_j 不再表示雇用工人数，而表示一个受聘工人的劳动投入（通常指劳动时间），因

而 c_j 是工人的收入. $H(\cdot)$ 表示投入劳动而给工人带来的负效用,通常 $H(l)$ 与 l 正相关且边际负效用递增,因此假定

$$\begin{cases} H'(\cdot) > 0, & H''(\cdot) > 0; \\ H'(0) = 0, & H'(\infty) = \infty. \end{cases} \tag{14}$$

注意,方程组(14)通常是成本函数所共有的性质.问题(12)表明,厂商如此设计为求职者提供的合同:合同规定被雇工人在状态 j 出现时应投入的劳动 l_j 且工资率为 w_j,这一安排,一方面保证工人的期望效用不低于 v_0,另一方面则保证厂商获得最大期望利润.因不存在解雇工人的问题,故不必像1.3.1小节中一样考虑某个与失业无异的最低工资 w_0.

B. 最优性条件

如同问题(5)一样,在求问题(12)的最优性条件时,不妨以 $v = v_0$ 取代式(12b)中的 $v \geqslant v_0$. 令

$$L = \sum_j \pi_j [A_j f(l_j) - c_j + \lambda U(c_j) - \lambda H(l_j)],$$

则

$$\begin{cases} \pi_j^{-1} \dfrac{\partial L}{\partial l_j} = A_j f'(l_j) - w_j + \lambda U'(c_j) w_j - \lambda H'(l_j) = 0, & (15a) \\ \pi_j^{-1} \dfrac{\partial L}{\partial w_j} = - l_j + \lambda l_j U'(c_j) = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant n). & (15b) \end{cases}$$

方程组(15)与 $v = v_0$ 一起有 $2n+1$ 个方程,它们被用来确定 $2n+1$ 个变量 l_j, $w_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 与 λ. 类似于1.3.1B中的做法,求解的过程大致如下:首先由方程(15b)得出

$$c_j = U'^{-1}(1/\lambda) \triangleq c$$

与状态 j 无关.这恰如1.3.1小节中工资 w 与 j 无关.不过,工人的状态无关收入 c 仍然待定.其次,以 $\lambda = 1/U'(c)$ 代入方程(15a)得

$$\varphi(l_j) \triangleq H'(l_j)/f'(l_j) = A_j U'(c). \tag{16}$$

因

$$f'(l)^2 \varphi'(l) = f'(l) H''(l) - f''(l) H'(l) > 0,$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = \infty, \qquad (\text{用式}(14))$$

故由式(16)可唯一地解出 $l_j = l_j(c) > 0$. 然后以 $c_j = c, l_j = l_j(c)$ 代入等式 $v = v_0$ 得到关于 c 的方程:

$$U(c) - \sum_j \pi_j H[l_j(c)] = v_0. \tag{17}$$

设从方程(17)可唯一地解出 $c > 0$,则依 $l_j = l_j(c)$ 得到最优的劳动投入 l_j;然后由 $w_j = c/l_j$ 得到最优工资率 w_j. 这就可以认为已解出问题(12).不过,在未给出 $f(\cdot)$,$U(\cdot)$ 与 $H(\cdot)$ 的表达式的情况下,并不能得到 l_j,w_j 的显式表达.注意方程(17)与方程(11)是恰相对应的.

C. 某些结论

现在从式(15)～式(17)推出某些定性结论，这些结论用来解释劳动市场上的一些现象是有启发性的.

(i) 由式(17)得出工人的收入为

$$c = U^{-1}[v_0 + \mathrm{E}H(l)]. \tag{18}$$

因 $U(\cdot)$ 是严格增函数，故 c 与 v_0 及期望"劳累负效用"正相关，与状态无关.

(ii) 由式(16)有 $l_j = \varphi^{-1}[A_jU(c)]$，而 $\varphi(\cdot)$ 是严格增函数，因此 l_j 严格与 A_j 正相关. 这就由式(13)推出

$$l_1 < l_2 < \cdots < l_n,$$

$$w_1 > w_2 > \cdots > w_n.$$

注意，与问题(5)对照，对于问题(5)尽管可推出式(8)，但并不能保证 $l_{n-1} < l_n$.

(iii) 工人收入与状态无关，而劳动投入与工资率成反比：要想提高工资率，就必须减少工作时间，反之亦然.

1.3.3 内部工人模型

雇主所雇用的工人中，可能有一部分特殊工人，他们因传统关系拥有一定特权，而不完全为市场法则所支配. 这些人被称为**内部工人**，而其余的工人则称为**外部工人**，后者在无情的市场竞争中得不到什么保护. 内部工人与外部工人的划分颇接近于中国企业中的正式工与临时工，两者的差别是众所周知的，且一直为人所诟病. 内部工人与外部工人的问题颇令人关注，已积累了不少文献，特别应提到Shaked 等(1984)，Solow(1985)与Gottfries(1992)的著述. 现在我们对这一情况作一数学描述.

A. 模型描述

总体上说，内部工人与外部工人的区分是明显的；但细致的界定仍可能很复杂，一个形式的描述必定依赖于适当的简化. 下面假定内部工人的人数固定，工资依赖于状态；而外部工人的工资与雇用数都是与状态相依的. 这样，厂商决策问题可表为

$$\begin{cases} \max V = \sum_j \pi_j[A_jf(l_j) - l_Iw_{Ij} - l_{oj}w_{oj}], & \text{(19a)} \\ \text{s.t.} \quad v = \sum_j \pi_jU(w_{Ij}) \geqslant v_0, & \text{(19b)} \end{cases}$$

其中下标 I 与 o 分别标示内部工人与外部工人，记号 $\pi_j, A_j, f(\cdot), U(\cdot)$ 与 v_0 如同问题(12)，$l_j = l_I + l_{oj}$，l_I 与状态无关意味着，厂商有责任雇用每个内部工人，而不论未来状态 j 有什么变化. 条件(19b)意味着，厂商的工资安排必须保证内部工人的某个最低效用；而对于外部工人，厂商却无此顾忌. 另一方面，从激励效

果考虑，厂商也不能任意压低外部工人的工资. 过大的工资差距，对于具有同样生产能力的外部工人的心理承受力，必然是一严重的考验. 因此，工资 w_{oj} 与 w_{Ij} 通常有某种正相关性. 一种最简单的关系是

$$w_{oj} = q w_{Ij} \quad (0 < q < 1,\ 1 \leqslant j \leqslant n), \tag{20}$$

更一般的关系是 $w_{oj} = \varphi(w_{Ij})$，$\varphi(\cdot) > 0$，$\varphi'(\cdot) \leqslant 0$.

B. 最优性条件

作 Lagrange 函数

$$L = \sum_j \pi_j [A_j f(l_j) - w_{Ij} l_I - q l_{oj} w_{Ij} + \lambda U(w_{Ij})],$$

则问题(19)的解应满足条件：

$$\begin{cases} \pi_j^{-1} \dfrac{\partial L}{\partial l_{oj}} = A_j f'(l_j) - q w_{Ij} = 0, & \text{(21a)} \\ \pi_j^{-1} \dfrac{\partial L}{\partial w_{Ij}} = - l_I - q l_{oj} + \lambda U'(w_{Ij}) = 0, & \text{(21b)} \end{cases}$$

其中 $1 \leqslant j \leqslant n$. 由方程(21b)解出

$$l_{oj} = q^{-1}[\lambda U'(w_{Ij}) - l_I], \tag{22}$$

代入方程(21a)得

$$g(w_{Ij}) \triangleq w_{Ij}^{-1} f'((1 - q^{-1}) l_I + \lambda q^{-1} U'(w_{Ij})) = q / A_j. \tag{23}$$

设由式(23)唯一地解出 $w_{Ij} = w_{Ij}(\lambda)$，代回式(22)后得 $I_{oj} = I_{oj}(\lambda)$；代入式(19b)得到只含 λ 的方程

$$\sum_j \pi_j U(w_{Ij}(\lambda)) = v_0. \tag{24}$$

若由方程(24)唯一地决定 $\lambda > 0$，则 $w_{Ij}(\lambda)$ 与 $I_{oj}(\lambda)$ 亦随之确定，这就在原则上完全解出了问题(19). 注意，方程(24)可与方程(17)或方程(11)相对照.

C. 某些结论

利用式(21)～式(24)，可得出某些定性结论，其中一些结论可与1.3 2小节中的某些结论相对照.

(i) A_j 的影响. 设 $g(\cdot)$ 依式(23)，则

$$w^2 g'(w) = \lambda q^{-1} w f''(l) U''(w) - f'(l),$$

其中 $l = (1 - q^{-1}) l_I + \lambda q^{-1} U'(w)$. 若 q 很小，则不妨设 $g'(\cdot) > 0$，因而

$$w_{Ij} = g^{-1}(q / A_j)$$

与 A_j 负相关. 另一方面，由 $U'(\cdot)$ 严格单调减及式(22)知，l_{oj} 与 A_j 正相关. 于是从式(13)得出

$$l_{o1} < l_{o2} < \cdots < l_{on},$$

$$w_{I1} > w_{I2} < \cdots < w_{In}.$$

这与1.3.2小节中的结论是类似的：较高的生产力对应较高的雇用外部工人数

与较低的工资;生产力的提高对于内部工人并无好处.

(ii) q 的影响. 将式(23)改写作

$$A_j f'(l_j) = q w_{Ij}.$$

两边对 q 求导得

$$A_j f''(l_j)\left[\frac{l_I}{q^2} - \frac{\lambda}{q^2}U'(w_{Ij}) + \frac{\lambda}{q}U''(w_{Ij})\frac{\partial w_{Ij}}{\partial q}\right] = w_{Ij} + q\frac{\partial w_{Ij}}{\partial q},$$

由上式结合式(22)解出

$$\frac{\partial w_{Ij}}{\partial q} = \frac{q w_{Ij} + A_j l_{oj} f''(l_j)}{A_j \lambda f''(l_j)U''(w_{Ij}) - q^2}.$$

因此,当 q 充分小时, $\partial w_{Ij}/\partial q < 0$. 类似地,从式(22)、式(23)求出

$$\frac{\partial l_{oj}}{\partial q} = \frac{q l_{oj} + \lambda w_{Ij} U''(w_{Ij})}{A_j \lambda f''(l_j)U''(w_{Ij}) - q^2},$$

故当 q 充分小时有 $\partial l_{oj}/\partial q < 0$. 这表明,如果外部工人的工资相对偏低,则进一步扩大工资差距将提高外部工人的工资,同时也加大外部工人的数量.

参考文献

[1] Azariadis C. On the incidence of unemployment[J]. Rev. Eco. Studies, 1976,43:115-126.

[2] Baily M N. Wages and employment under uncertain demand[J]. Rev. Eco. Studies, 1974,41:37-50.

[3] Blanchard O J, Summers L H. Hysteresis in unemployment[J]. European Eco. Rev., 1987,31:288-295.

[4] Gottfries N. Insiders, outsiders and norminal wage contracts[J]. J. Political Eco., 1992,100:252-270.

[5] Gregory R G. Wage policy and unemployment in Australia[J]. Economica, 1986, 53:S53-S74.

[6] Hansen G D. Indivisible labor and the business cycle[J]. J. Monetary Eco., 1985,16:309-327.

[7] Jovanovic B. Job matching and the theory of turnover[J]. J. Political Eco., 1979,87:972-990.

[8] Lindbeck A, Snower D J. Wage setting, unemployment and insider outsider relations[J]. Amer. Eco. Rev., 1986,76:235-239.

[9] Lindbeck A, Snower D J. The Insider-Outsider Theory of Employment and Unemployment[M]. Cambridge: MIT-Press, 1988.

[10] Rosen S. Implicit contracts: a survey[J]. J. Eco. Literature, 1985,23: 1144-1175.

[11] Shaked A, Sutton J. Involuntary unemployment as perfect equilibrium in a bargaining model[J]. Econometrica, 1984,52:1351-1364.

[12] Solow R M. Insiders and outsiders in wage determination[J]. Scand. J. Eco., 1985,87:411-428.

第2章　离散时间随机模型

在最一般的意义上，任何经济变量（如消费、投资、产出等等）都可看作随时间 t 演进的随机序列，即所谓经济时间序列. 这只是一个平凡的事实，说出这一点并无深意. 但要使随机序列成为描述经济系统的有效工具，就必须指出：

(i) 描述给定经济变量的随机序列 x_t 服从哪些规律？

(ii) 同一经济系统中不同的经济变量 x_t，y_t 等的相互关系服从哪些约束条件？

对这些问题的解答，通常基于某个离散时间形式下的随机最优决策问题. 关于决策问题的最优性条件导向一组随机差分方程，有关经济系统的演进规律的结论则由对所得随机差分方程组的分析得出. 因此，从数理分析的角度看，关于离散时间随机模型的理论，无非是特定背景下的随机最优化与随机差分方程理论. 鉴于此，本章首先概括地给出有关随机序列与随机差分方程的基本知识，然后将其运用于各种具体的经济模型.

2.1　随 机 序 列

在最一般的意义上，任何一列随机变量 $x_t(t \in \mathbf{Z})$ 都称为随机序列，亦即离散时间的随机过程. 但仅当限制 x_t 具有特定性质时，才能对它作出某些有价值的结论. 依据一般随机过程理论，可以限定 x_t 是平稳序列、Markov 序列等等. 从用于经济模型的角度考虑，我们将主要考虑限定 x_t 为平稳序列的情况. 主要关注长期趋势的宏观经济模型，核心问题是在一定均衡状态下诸经济变量的行为，而这正是平稳序列能起作用的地方. 本节概述有关的基本概念、术语与结果，其中大部分内容是标准的，其详细讨论见于流行的随机过程著作.

以下 x_t，y_t 等总记实随机序列.

2.1.1　平稳序列

若随机序列 $x_t(t \in \mathbf{Z})$ 满足以下条件：

$$\mu_x \triangleq \mathrm{E}x_t \equiv \text{const}, \quad R_x(k) \triangleq \mathrm{E}(x_t x_{t-k}) \tag{1}$$

仅与 $k(\in \mathbf{Z})$ 有关，则称 x_t 为**平稳序列**. 这种序列用来描述已进入稳定状态但仍

存在随机波动的发展过程.

A. 相关函数与谱

以下设 x_t 是给定的平稳序列，μ_x 与 $R_x(k)$ 依式(1)，二者分别称为 x_t 的**均值**与**相关函数**. 直观上，函数 $R_x(\cdot)$ 描述了序列 x_t 在不同时间的相互关联. 利用 $R_x(\cdot)$ 可标准地定义如下两个函数①：

$$\begin{cases} g_x(z) = \sum_k R_x(k) z^k, & \text{(2a)} \\ s_x(\omega) = g_x(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}) = \sum_k R_x(k) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}, & \text{(2b)} \end{cases}$$

二者分别称为平稳序列 x_t 的**生成函数**与**谱密度**，习惯上称变量 ω 为**频谱**. 生成函数 $g_x(z)$ 通常是某个包含单位圆周在内的区域内的复解析函数. 若 $R_x(\cdot) \in L^2(\mathbf{Z})\left(\Leftrightarrow \sum_k |R_x(k)|^2 < \infty\right)$，则式(2b)右端在 $|\omega| \leqslant \pi$ 上均方收敛，因而 $s_x(\cdot) \in L^2[-\pi,\pi]$；若 $R_x(\cdot) \in L^1(\mathbf{Z})\left(\Leftrightarrow \sum_k |R_x(k)| < \infty\right)$，则式(2b)右端绝对并一致收敛，因而 $s_x(\cdot) \in C(\mathbf{R})$. 当 $R_x(\cdot)$ 不满足以上条件时，在广义函数的意义上，函数 $g_x(\cdot)$ 与 $s_x(\cdot)$ 依式(2)依然有定义.

值得强调指出的是，$g_x(\cdot)$ 与 $s_x(\cdot)$ 完全由相关函数 $R_x(\cdot)$ 决定，它们并不包含关于序列 x_t 的新的信息. 而且引进 $g_x(\cdot)$ 与 $s_x(\cdot)$ 这两个函数，明显地带有人为性质；无论 $g_x(\cdot)$ 与 $s_x(\cdot)$，与 x_t 的联系似乎都不及 $R_x(\cdot)$ 那样直接. 但从刻画 x_t 的效果来看，$R_x(\cdot)$、$g_x(\cdot)$ 与 $s_x(\cdot)$ 这三个函数确实各有优点，因而都是需要的.

下面列举函数 $R_x(\cdot)$、$g_x(\cdot)$ 与 $s_x(\cdot)$ 的一些主要性质.

(i) **对称性**. 直接由定义式(1)与式(2)推出

$$\begin{cases} R_x(-k) = R_x(k), \quad g_x(z^{-1}) = g_x(z), & \text{(3a)} \\ s_x(-\omega) = s_x(\omega) = R_x(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} R_x(k) \cos k\omega. & \text{(3b)} \end{cases}$$

这表明，$R_x(\cdot)$ 与 $s_x(\cdot)$ 是偶函数，而 $g_x(\cdot)$ 则在某种意义上关于 $|z| = 1$ 对称.

(ii) **有界性**. 由不等式 $|\mathrm{E}(x_t x_s)|^2 \leqslant \mathrm{E}x_t^2 \mathrm{E}x_s^2$ 得

$$|R_x(k)| \leqslant R_x(0) = \sigma_x^2 + \mu_x^2, \tag{4}$$

其中方差 $\sigma_x^2 \triangleq Dx_t$ 与 t 无关. 由 $R_x(\cdot)$ 有界可推出，函数 $g_x(z)$ 至少对 $|z| < 1$ 有定义. 一般来说，当 $k \to \infty$ 时 $R_x(k)$ 下降愈快(这意味着 x_t 的相关性随时间跨度增大而衰减愈快)，则 $g_x(\cdot)$ 与 $s_x(\cdot)$ 的性质就愈好. 若仅除有限项外 $R_x(k) =$

---

① 依标准的数学术语，$g_x(z)$ 与 $s_x(\omega)$ 分别称为函数 $R_x(\cdot)$ 的 z 变换与 Fourier 变换. 只要 $\sum_k |R_x(k)|^2 < \infty$，在均方收敛的意义上 $g_x(z)$ 与 $s_x(\omega)$ 分别在 $|z| = 1$ 与 $|\omega| \leqslant \pi$ 上有定义.

0，则 $g_x(\cdot)$ 与 $s_x(\cdot)$ 分别为有理函数与余弦多项式.

(iii) **反演公式**. $R_x(k)$ 可由 $s_x(\cdot)$ 或 $g_x(\cdot)$ 唯一决定：

$$R_x(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_x(\omega)e^{-ik\omega}d\omega \tag{5a}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} g_x(z)z^{-k-1}dz \tag{5b}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} g_x(z)z^{k-1}dz. \tag{5c}$$

式(2b)与式(5a)表明，函数 $R_x(\cdot)$ 与 $s_x(\cdot)$ 互为Fourier 变换；式(2a)与式(5b)表明，$R_x(k)$ 正是 $g_x(z)$ 的Laurent 展开式的Laurent 系数. 式(5a)可等价地写成

$$R_x(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} s_x(\omega)\cos(k\omega)d\omega. \tag{5a$'$}$$

特别，取 $k=0$ 得

$$\sigma_x^2 + \mu_x^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} s_x(\omega)d\omega. \tag{6}$$

可以指明 $s_x(\omega) \geqslant 0$. 当 $\mu_x = 0$ 时式(6)给出方差 σ_x^2 的一个分解.

B. 联合平稳序列

设 x_t, y_t 是平稳序列. 若

$$R_{xy}(k) \triangleq \mathrm{E}(x_t y_{t-k}) \tag{7}$$

仅与 k 有关，则称 x_t 与 y_t 为联合平稳序列. 式(7)意味着，x_t 与 y_t 的相关关系处于不随时间变化的稳定状态，这正是对宏观经济变量作均衡分析时所要设定的. 由式(7)所定义的函数 $R_{xy}(\cdot)$ 就称为 x_t 与 y_t 的**互相关函数**. 以 $R_{xy}(\cdot)$ 取代 $R_x(\cdot)$，就得到上段中诸概念与公式的相应推广. 首先，相应于式(2)，令

$$\begin{cases} g_{xy}(z) = \sum_k R_{xy}(k)z^k, & (8a) \\ s_{xy}(\omega) = g_{xy}(e^{-i\omega}) = \sum_k R_{xy}(k)e^{-ki\omega}, & (8b) \end{cases}$$

二者分别称为 x_t 与 y_t 的**互生成函数与互谱密度**. 相应地，式(3)～式(5)分别有如下推广：

$$\begin{cases} R_{xy}(-k) = R_{yx}(k), \quad g_{xy}(z^{-1}) = g_{yx}(z); \\ s_{xy}(-\omega) = s_{yx}(\omega); \end{cases} \tag{9}$$

$$|R_{xy}(k)|^2 \leqslant R_x(0)R_y(0); \tag{10}$$

$$R_{xy}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_{xy}(\omega)e^{-ik\omega}d\omega \tag{11a}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} g_{xy}(z)z^{-k-1}dz \tag{11b}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} g_{xy}(z^{-1})z^{k-1}dz. \tag{11c}$$

须注意的差别是：若 $x \neq y$，则 $R_{xy}(\cdot)$ 与 $s_{xy}(\cdot)$ 未必为偶函数；$s_{xy}(\cdot)$ 未必为实函数，更不必有 $s_{xy}(\cdot) \geqslant 0$.

式(8)与式(11)为计算 $R_{xy}(k)$ 提供了如下方法.

(i) **Laurent 级数法.** 式(8a)表明，$R_{xy}(k)$ 正是函数 $g_{xy}(z)$ 的 Laurent 展开式的系数. 若能通过某一途径获得 $g_{xy}(z)$ 的Laurent 展开式，则 $R_{xy}(k)$ 便随之得出.

(ii) **留数法.** 由留数定理及式(11b)、式(11c)有

$$R_{xy}(k) = \sum \mathrm{Res}[g_{xy}(z)z^{-k-1}] \tag{12a}$$

$$= \sum \mathrm{Res}[g_{xy}(z^{-1})z^{k-1}], \tag{12b}$$

其中留数是对函数 $g_{xy}(z)z^{-k-1}$ (对式(12a))或 $g_{xy}(z^{-1})z^{k-1}$ (对式(12b))在 $|z| < 1$ 内的所有奇点取的. 用式(12a)还是式(12b)，由 $g_{xy}(z)$ 的表达式依方便选定.

以上方法当然亦可用于计算 $R_x(k)$，且因 $R_x(\cdot)$ 是偶函数，只需考虑 $k \geqslant 0$.

C. 正交性

如所熟知，若随机变量 x, y 满足 $\mathrm{E}(xy) = 0$，则称 x 与 y 正交[①](即 x 与 y 不相关). 相应地，若随机序列 x_t, y_t 满足条件

$$\mathrm{E}(x_t y_s) = 0 \quad (\forall\, t, s \in \mathbf{Z}),$$

则称 x_t 与 y_t 为互相正交的序列. 显然，平稳序列 x_t 与 y_t 互相正交的充要条件是 $R_{xy}(k) \equiv 0$. 若 x_t 与 y_t 是互相正交的平稳序列，则

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[(x_t + y_t)(x_{t-k} + y_{t-k})]\\ &= \mathrm{E}(x_t x_{t-k}) + \mathrm{E}(y_t y_{t-k}) = R_x(k) + R_y(k).\end{aligned}$$

这就得到

$$\begin{cases} R_{x+y}(k) = R_x(k) + R_y(k), \\ g_{x+y}(z) = g_x(z) + g_y(z), \\ s_{x+y}(\omega) = s_x(\omega) + s_y(\omega), \\ \sigma_{x+y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad (\text{若 } \mu_x = 0 = \mu_y). \end{cases} \tag{13}$$

更一般地，若 x_t, y_t, u_t, v_t 是平稳序列，x_t 与 y_t 互相正交，u_t 与 v_t 互相正交，则

$$R_{(x+u)(y+v)}(k) = R_{xv}(k) + R_{uy}(k), \tag{14}$$

关于 $g(\cdot)$ 与 $s(\cdot)$ 的类似公式是明显的，不必一一列举. 式(13)与式(14)表明，正交性导致简单的加法公式，正是这一点使得正交性成为一个极有用处的假设.

涉及正交性的问题通常联系于Hilbert 空间 $L^2(\Omega)$，其中 Ω 是基本的概率空

---

① 给定概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$，Ω 上所有平方可积随机变量构成一 Hilbert 空间 $L^2(\Omega)$，其中的内积定义为 $\langle x, y\rangle = \mathrm{E}(xy)$，因而 $x \perp y \Leftrightarrow \mathrm{E}(xy) = 0$.

间.若 x_t 与 y_t 是互相正交的平稳序列,令

$$X = \overline{\text{span}}\{x_t : t \in \mathbf{Z}\}, \quad Y = \overline{\text{span}}\{y_t : t \in \mathbf{Z}\},$$

其中对 $A \subset L^2(\Omega)$,$\overline{\text{span}}\,A$ 表示 A 生成的闭子空间,则 X 与 Y 是 $L^2(\Omega)$ 的闭子空间且互相正交.若 $u_t = v_t + y_t, v_t \in X$,则 v_t 必为 u_t 在 X 上的正投影,称 v_t 为序列 u_t 对序列 x_t 的投影.这些术语是基本而常用的.

2.1.2 随机序列的变换

给定平稳序列 u_t,如何用它构成新的平稳序列 x_t,以达到某个预定目的?下面提出一个标准的构造模式,从形式上看,它无非是对随机序列作一定的线性变换.

A. 变换公式

分两种情况考虑.

(i) 特殊情况.给定平稳序列 u_t 与多项式 $B(z) = \sum_j b_j z^j$ (一般是无穷的),令 $L^j u_t = u_{t-j}$($t, j \in \mathbf{Z}$,称 L 为**延迟算子**),定义

$$x_t = B(L)u_t \triangleq \sum_j b_j u_{t-j} \quad (t \in \mathbf{Z}),$$

假定上式右端均方收敛①.直观上,可以认为 x_t 是 u_t 的一个"移动加权平均",权数就是 b_j.由直接计算有

$$\begin{cases} \mu_x = \mathrm{E}x_t = \sum_j b_j \mu_u, \\ R_x(k) = \sum_{i,j} b_i b_j R_u(i - j + k), \\ R_{xu}(k) = \sum_j b_j R_u(k - j). \end{cases} \tag{15}$$

这表明 x_t 是平稳序列且与 u_t 是联合平稳的.利用式(15)易求得

$$\begin{cases} g_x(z) = B(z)B(z^{-1})g_u(z), & (16\text{a}) \\ s_x(\omega) = |B(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|^2 s_u(\omega); & (16\text{b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_{xu}(z) = B(z)g_u(z), & (17\text{a}) \\ s_{xu}(\omega) = B(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})s_u(\omega). & (17\text{b}) \end{cases}$$

利用式(17b)可反演出(对照式(5))

$$b_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{s_{xu}(\omega)}{s_u(\omega)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega} \mathrm{d}\omega \tag{18a}$$

---

① 虽然本书并不涉及收敛性的严格讨论,但收敛性无疑是重要的.在使用 $B(L) = \sum b_j L^j$ 时,通常假定级数 $\sum b_j$(或 $\sum b_j^2$)收敛,这就使得,至少当 $u_t \equiv u_0$ 时,$B(L)u_t = u_0 \sum b_j$ 总是有意义的.特别地,在运用展开式 $(1-\lambda L)^{-1} = \sum_0^{\infty} \lambda^j L^j$ 与 $(1-\mu^{-1}L^{-1})^{-1} = \sum_0^{\infty} \mu^{-j} L^{-j}$ 时,通常假定 $|\lambda| < 1$,$|\mu| > 1$.

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} B(z)z^{-k-1}\mathrm{d}z \tag{18b}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} B(z^{-1})z^{k-1}\mathrm{d}z. \tag{18c}$$

(ii) 一般情况. 设 u_t, v_t 是互相正交的平稳序列,定义

$$\begin{cases} x_t = A(L)u_t + B(L)v_t, \\ y_t = C(L)u_t + D(L)v_t, \end{cases}$$

其中 $A(L), B(L), C(L)$ 与 $D(L)$ 为多项式. 令 $a_t = A(L)u_t$, 仿此定义 b_t, c_t, d_t, 则 a_t, b_t, c_t, d_t 均为平稳序列,且易验知 a_t 与 b_t、d_t 正交, c_t 与 b_t、d_t 正交,于是由式(13)与式(16a)有

$$g_x(z) = A(z)A(z^{-1})g_u(z) + B(z)B(z^{-1})g_v(z), \tag{19a}$$

$$g_y(z) = C(z)C(z^{-1})g_u(z) + D(z)D(z^{-1})g_v(z). \tag{19b}$$

其次(用式(14))

$$g_{xy}(z) = g_{ac}(z) + g_{bd}(z).$$

而由 $a_t = A(L)u_t = A(L)C(L)^{-1}c_t$ 与式(17a)有

$$\begin{aligned} g_{ac}(z) &= A(z)C(z)^{-1}g_c(z) \\ &= A(z)C(z)^{-1}C(z)C(z^{-1})g_u(z) \quad (\text{用式(16a)}) \\ &= A(z)C(z^{-1})g_u(z), \end{aligned}$$

对 $g_{bd}(z)$ 有类似结果. 于是得

$$\begin{cases} g_{xy}(z) = A(z)C(z^{-1})g_u(z) + B(z)D(z^{-1})g_v(z), & \text{(20a)} \\ s_{xy}(\omega) = A(e^{-i\omega})C(e^{i\omega})s_u(\omega) + B(e^{-i\omega})D(e^{i\omega})s_v(\omega). & \text{(20b)} \end{cases}$$

若 $B(\cdot) = 0, C(\cdot) = 1, D(\cdot) = 0$, 则式(19a)、(20a)分别与式(16a)、(17a)一致,只是字母 B 换成了 A.

B. 白噪声

有了上面给出的变换方法之后,人们的下一个目标就是寻求某个充分简单的平稳序列,使之能成为通过适当变换得出一般平稳序列的基本构块. 所谓白噪声正好用于这一目的. 若随机序列 ε_t 满足 $\mathrm{E}\varepsilon_t = 0, \mathrm{E}\{\varepsilon_t\varepsilon_j\} = \sigma_\varepsilon^2\delta_{tj}, \sigma_\varepsilon > 0, \delta_{tj}$ 是通常的 Kronecker 记号,则称 ε_t 为白噪声.

若未加说明,今后 ε_t 总记某个给定的白噪声. 直观上,白噪声是分散在各个时点上且互不相关的随机冲击,各个冲击有同样的均值零与方差 σ_ε^2. 白噪声似乎有极简单的结构,但其样本仍然可能是高度不规则的;唯因如此,它才可能用来构造呈现高度不规则性的其他随机序列. 而从 Hilbert 空间的语言来说, $\varepsilon_t/\sigma_\varepsilon$ 是一标准正交系,这一事实正是白噪声的优势所在. 对于 ε_t, 函数 $R_\varepsilon(\cdot)$ 与 $g_\varepsilon(\cdot)$ 极其简单:

$$\begin{cases} R_\varepsilon(0) = \sigma_\varepsilon^2, \quad R_\varepsilon(k) \equiv 0 \quad (k \neq 0), \\ g_\varepsilon(z) = s_\varepsilon(\omega) \equiv \sigma_\varepsilon^2. \end{cases} \tag{21}$$

就白噪声本身而言，已无进一步讨论之必要. 真正重要的问题是，如何利用白噪声来表示一般的平稳序列. 对这一问题的彻底解决就在下文，此处预先作一些准备. 设 $B(z) = \sum_j b_j z^j$，$\{b_j\} \subset L^2(\mathbf{Z})$，则

$$x_t = B(L)\varepsilon_t = \sum_j b_j \varepsilon_{t-j} \tag{22}$$

是一平稳序列，依式(16)、式(17)、式(21)有

$$\begin{cases} g_x(z) = \sigma_\varepsilon^2 B(z) B(z^{-1}), \\ s_x(\omega) = \sigma_\varepsilon^2 |B(e^{i\omega})|^2, \\ g_{x\varepsilon}(z) = \sigma_\varepsilon^2 B(z), \\ s_{x\varepsilon}(\omega) = \sigma_\varepsilon^2 B(e^{-i\omega}). \end{cases} \tag{23}$$

与式(22)相联系的一些术语被广泛使用：若 x_t 被表为式(22)，则称式(22)为 x_t 的**移动平均表示**；若 $B(z)$ 是 n 次多项式，则称 x_t 为 n 阶移动平均序列或 MA(n)序列，也称 x_t 服从MA (n) 模型. 反之，若

$$A(L)x_t = \varepsilon_t, \quad A(L) = \sum_j a_j L^j, \tag{24}$$

则称式(24)为 x_t 的**自回归表示**；当 $A(z)$ 为 n 次多项式时，称 x_t 为 n 阶自回归序列或 AR (n) 序列，也称 x_t 服从 AR(n)模型. MA(n)序列与 AR(n)序列是经济时间序列的常用形式. 若 x_t 表为式(22)，多项式 $B(z)$ 的零点皆位于单位圆之外，$A(z) = 1/B(z)$，则 $A(L)x_t$ 有意义且 $A(L)x_t = \varepsilon_t$. 由此可见，在一定条件下，平稳序列的移动平均表示自动地引导出自回归表示，反之亦然. 常见的经济时间序列往往兼有移动平均表示与自回归表示. 今后在必要时总假定这两种表示均存在.

上面指明了白噪声的移动平均必为平稳序列. 一个深刻得多的结论是，上述事实的某种逆命题也成立，这就是下面的表示定理.

C. 表示定理(Wold，1938)

设 x_t 是任给的平稳序列，则存在白噪声 ε_t 及与 ε_t 正交的平稳序列 u_t 及 $B(L) = \sum_0^\infty b_j L^j$，使得

$$x_t = B(L)\varepsilon_t + u_t \quad (t \in \mathbf{Z}), \tag{25}$$

且 $\{b_j\} \subset L^2(\mathbf{Z}_+)$，$u_t \in \bigcap_{s\in\mathbf{Z}} X_s$，$X_s = \overline{\text{span}}\{x_j : j \leqslant s\}$；$x_t - \varepsilon_t$ 是 x_t 在 X_{t-1} 上的正交投影.

式(25)称为 x_t 的**Wold 表示**，其中 $B(L)\varepsilon_t$ 与 u_t 分别称为 x_t 的“不确定部分”与“确定部分”. 若 $u_t \equiv 0$，则说序列 x_t 是纯不确定的. 因表示定理的证明颇长，下面只给出了主要的证明步骤.

证　不妨设 $\mu_x = 0$. 以 P_t 记 Hilbert 空间 $L^2(\Omega)$ 到其闭子空间 X_t 的正投影,令 $\varepsilon_t = x_t - P_{t-1}x_t$.

(i) 方差逼近. 令 $X_t^n = \mathrm{span}\{x_j : (t-n) < j \leqslant t\}$, 以 x_t^n 记 x_t 在 X_{t-1}^n 上的正投影,设 $x_t^n = \sum_{j=1}^n a_j^n x_{t-j}$. 用 x_t 的平稳性可验知 a_j^n 与 t 无关. $\forall\ \delta > 0$, 取 n 充分大,使得有 $y \in X_{t-1}^n$, 满足

$$\mathrm{E}|y - P_{t-1}x_t|^2 < \delta^2,$$
$$\mathrm{E}|y - x_t|^2 < \mathrm{E}|\varepsilon_t|^2 + \delta^2.$$

因 $y - x_t^n$ 与 $x_t - x_t^n$ 正交,故由勾股定理有

$$\mathrm{E}|y - x_t^n|^2 = \mathrm{E}|y - x_t|^2 - \mathrm{E}|x_t - x_t^n|^2 < \mathrm{E}|\varepsilon_t|^2 + \delta^2 - \mathrm{E}|\varepsilon_t|^2 = \delta^2.$$

于是

$$(\mathrm{E}|x_t^n - P_{t-1}x_t|^2)^{1/2} \leqslant (\mathrm{E}|x_t^n - y|^2)^{1/2} + (\mathrm{E}|y - P_{t-1}x_t|^2)^{1/2} < 2\delta.$$

这表明当 $n \to \infty$ 时 $x_t^n \to P_{t-1}x_t$ (均方收敛).

(ii) 证 ε_t 为白噪声. 若 $s < t$, 则由 $\varepsilon_t \in X_{t-1}^{\perp} \subset X_s^{\perp}$ 与 $\varepsilon_s \in X_s$ 推出 $\mathrm{E}(\varepsilon_t\varepsilon_s) = 0$. 其次,

$$\mathrm{E}\varepsilon_t = \lim_n \mathrm{E}(x_t - x_t^n) = 0;$$
$$\mathrm{E}\varepsilon_t^2 = \lim_n \mathrm{E}(x_t - x_t^n)^2 = \mathrm{E}x_t^2 + \lim_n \mathrm{E}(|x_t^n|^2 - 2x_t x_t^n)$$
$$= R_x(0) + \lim_n \Big[\sum_{i,j=1}^n a_i^n a_j^n R_x(i-j) - 2\sum_{j=1}^n a_j^n R_x(j)\Big]$$

与 t 无关,故 ε_t 是白噪声.

(iii) 证 x_t 与 ε_t 联合平稳:

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t x_{t-k}) = \lim_n \mathrm{E}[(x_t - x_t^n)x_{t-k}] = R_x(k) - \lim_n \sum_{j=1}^n a_j^n R_x(j-k).$$

(iv) 证分解式(25)成立. 令 $b_j = R_{x\varepsilon}(j)/\sigma_\varepsilon^2 (j \geqslant 0)$, 则 $b_j\sigma_\varepsilon$ 正是 x_t 关于标准正交系 $\{\varepsilon_{t-j}/\sigma_\varepsilon : j \geqslant 0\}$ 的Fourier 系数. 由Bessell 不等式,必定 $\{b_j\} \in L^2(\mathbf{Z}_+)$. 令 $B(L) = \sum_0^\infty b_j L^j$, 则 $B(L)\varepsilon_t$ 有意义,且 $u_t = x_t - B(L)\varepsilon_t$ 为平稳序列.

(v) 证 u_t 与 ε_t 正交. 若 $s \leqslant t$, 则

$$\mathrm{E}(u_t\varepsilon_s) = \mathrm{E}(x_t\varepsilon_s) - \sum_{j=0}^\infty b_j \mathrm{E}(\varepsilon_{t-j}\varepsilon_s) = \sigma_\varepsilon^2 b_{t-s} - \sigma_\varepsilon^2 b_{t-s} = 0.$$

若 $s > t$, 则 $\varepsilon_s \in X_t^{\perp}$, 而 $u_t \in X_t$, 故亦有 $\mathrm{E}(u_t\varepsilon_s) = 0$.

(vi) 证 $u_t \in X_s (\forall\ s \in \mathbf{Z})$. 已知 $u_t \in X_t$, 设 $u_t \in X_s$, 今只要证 $u_t \in X_{s-1}$. 因 $X_s = \mathrm{span}(X_{s-1}, x_s) = \mathrm{span}\{X_{s-1}, \varepsilon_s\}$, 故有 $u_t = v + \lambda\varepsilon_s, v \in X_{s-1}$, 于是

$$\lambda\sigma_\varepsilon^2 = \mathrm{E}[(u_t - v)\varepsilon_s] = 0,$$

由此推出 $\lambda = 0$, 从而 $u_t \in X_{s-1}$, 即所要证. □

必须强调指出,依定理证明中所用的记号,有 $\varepsilon_t = x_t - P_{t-1}x_t$, 因而 ε_t 由 x_t

唯一决定. 如果预先任意给定白噪声 ε_t，然后依式(22)构成序列 x_t，则式(22)未必是 x_t 的 Wold 表示. 下面可以看到，一般的移动平均表示未必能起到 Wold 表示的作用.

2.1.3 预报

给定平稳序列 x_t，仍记 $X_t = \overline{\text{span}}\{x_j : j \leqslant t\}$，可以认为，$X_t$ 包含了由序列 x_t 所决定的直到时间 t 为止的信息. 以 P_t 记到 X_t 上的正投影. 由 Hilbert 空间理论，$P_t x_{t+k}$ 是 x_{t+k} 在 X_t 中的最佳均方逼近；用 $P_t X_{t+k}$ 作为 x_{t+k} 的某种估计量或预报值，是很自然的，称为 **k 步最小二乘预报**. 可以设想，在已知到 t 时信息的条件下，对 x_{t+k} 所能作的最好估计就是 $P_t x_{t+k}$.

A. 公式

首先给算子 P_t 一个更直观的解释. 以 E_t 记在到 t 期为止所知信息的条件下的条件期望. 现在作以下假定.

假定 $\mathrm{E}_t x_s (\forall\, s \in \mathbf{Z})$ 是 $x_j (j \leqslant t)$ 的线性函数.

这意味着，决定 $\mathrm{E}_t x_s$ 时，仅用到 x 在时间 t 及以前的状态，且 $\mathrm{E}_t x_s$ 线性地依赖于这些前状态. 可以认为，上述假设对经济时间序列是合适的. 今用以上假定建立基本公式

$$\mathrm{E}_t x_s = P_t x_s \quad (t, s \in \mathbf{Z}). \tag{26}$$

证 取 $t, s \in \mathbf{Z}$. 因有分解

$$x_s = \mathrm{E}_t x_s + (x_s - \mathrm{E}_t x_s)$$

且 $\mathrm{E}_t x_s \in X_t$，故只要证 $x_s - \mathrm{E}_t x_s \in X_t^{\perp}$. $\forall\, j \leqslant t$，有

$$\mathrm{E}[x_j(x_s - \mathrm{E}_t x_s)] = \mathrm{E}(x_j x_s) - \mathrm{E}(x_j \mathrm{E}_t x_s) = \mathrm{E}\mathrm{E}_t(x_j x_s) - \mathrm{E}\mathrm{E}_t(x_j x_s) = 0,$$

这正好表明了 $x_s - \mathrm{E}_t x_s \in X_t^{\perp}$. □

基于式(26)，现在可将预报 $P_t x_{t+k}$ 看作在时间 t 对 x_{t+k} 所作的预期，今后总等同 E_t 与 P_t.

现在设 x_t 表如式(22)，其中 $B(L) = \sum_0^{\infty} b_j L^j$，且 $\varepsilon_t = x_t - P_{t-1} x_t$（因而式(22)是 x_t 的 Wold 表示），则

$$\mathrm{E}_t x_{t+k} = \mathrm{E}_t \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t+k-j} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \mathrm{E}_t \varepsilon_{t+k-j} = \sum_{j=k}^{\infty} b_j \varepsilon_{t+k-j} = \sum_{j=k}^{\infty} b_j L^{j-k} \varepsilon_t,$$

其中用到 $\mathrm{E}_t \varepsilon_j = \varepsilon_j (j \leqslant t)$，$\mathrm{E}_t \varepsilon_j = 0 (j > t)$. 关于白噪声的这一结论是关键的，今后将多次用到. 约定

$$\Big(\sum_j \alpha_j z^j\Big)_+ = \sum_{j \geqslant 0} \alpha_j z^j. \tag{27}$$

则可将 $\mathrm{E}_t x_{t+k}$ 表为

$$\mathrm{E}_t x_{t+k} = [B(L) L^{-k}]_+ B(L)^{-1} x_t, \tag{28}$$

式(28)称为**Wiener-Kolmogorov 公式**.

如同在2.1.2C末尾一样,此处也要强调指出,仅当 $x_t = B(L)\varepsilon_t$ 是Wold表示(而不仅仅是移动平均表示)时,才能应用式(28). $x_t = B(L)\varepsilon_t$ 是Wold表示意味着,ε_t 正是以 x_t 的一步预报 $\mathrm{E}_{t-1}x_t$ 替换 x_t 的误差.今后只要基于表示 $x_t = B(L)\varepsilon_t$ 应用式(28),总认定所用到的是Wold表示.

B. 某些例子

(i) Muth的例子. Muth(1960)考虑了序列

$$x_t = bx_{t-1} + \varepsilon_t + a\varepsilon_{t-1} \quad (t \in \mathbf{Z}), \tag{29}$$

其中参数 a,b 满足 $|a| < 1, |b| \leqslant 1$. 式(29)可缩写成

$$x_t = (1 - bL)^{-1}(1 + aL)\varepsilon_t.$$

于是依Wiener-Kolmogorov公式有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t x_{t+k} &= [(1 - bL)^{-1}(1 + aL)L^{-k}]_+ (1 - bL)(1 + aL)^{-1}x_t \\ &= (a + b)b^{k-1}(1 - bL)^{-1}(1 - bL)(1 + aL)^{-1}x_t \\ &= (a + b)b^{k-1}(1 + aL)^{-1}x_t \quad (k > 0).\end{aligned}$$

令 $b = 1$ 得

$$\mathrm{E}_t x_{t+k} = (1 + a)(1 + aL)^{-1}x_t.$$

注意上式右端与 k 无关.当 $b = 1$ 时,式(29)成为

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t + a\varepsilon_{t-1}. \tag{29$'$}$$

式(29)′被用于"持久性收入理论"(参看2.3.2小节).

(ii) 给定平稳序列 x_t 的Wold表示:

$$x_t = \varepsilon_t - a\varepsilon_{t-1} + b\varepsilon_{t-2} = (1 - \lambda L)(1 - \mu L)\varepsilon_t \quad (t \in \mathbf{Z}),$$

其中 $a = \lambda + \mu, b = \lambda\mu, 0 < |\lambda|, |\mu| < 1$. 依式(28),有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t x_{t+1} &= \frac{[(1 - aL + bL^2)L^{-1}]_+}{(1 - \lambda L)(1 - \mu L)}x_t = \frac{bL - a}{(1 - \lambda L)(1 - \mu L)}x_t \\ &= \frac{1}{\lambda - \mu}\left(\frac{b - a\lambda}{1 - \lambda L} - \frac{b - a\mu}{1 - \mu L}\right)x_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(b - a\lambda)\lambda^j - (b - a\mu)\mu^j}{\lambda - \mu}x_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mu^{j+2} - \lambda^{j+2}}{\lambda - \mu}x_{t-j},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t x_{t+2} &= \frac{[(1 - aL + bL^2)L^{-2}]_+}{(1 - \lambda L)(1 - \mu L)}x_t = \frac{b}{(1 - \lambda L)(1 - \mu L)}x_t \\ &= \frac{b}{\lambda - \mu}\left(\frac{\lambda}{1 - \lambda L} - \frac{\mu}{1 - \mu L}\right)x_t = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda\mu(\lambda^{j+1} - \mu^{j+1})}{\lambda - \mu}x_{t-j},\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}_t x_{t+k} = 0 \quad (k \geqslant 3).$$

2.1.4 周期性

经济现象常常表现出一定的周期性,这对于经济学家与普通观察者似乎都

没有疑问.但真要准确地描述所显示的周期性,就会发现事情远比初看起来要复杂,因而很难建立一个清晰而被公认的理论,这就不免陷入无休止的争论.下面所作的讨论也不是已定型的最终结论,而只是列举某些流行的观点.

A. 一般描述

设 x_t 是给定的平稳序列.鉴于 x_t 的状态具有随机性,因而不能用通常的周期函数来界定 x_t 的周期性.究竟如何描述随机序列的周期性,并不是一件很明显的事.下面几种互异的观点与其说源于理论思考,不如说源于经验.

(i) 相关函数刻画.若 $R_x(k)$ 在 $|k| \to \infty$ 时显示出递降的振荡,如

$$R_x(k) = ar^{|k|}\cos bk,$$

其中 $a,b > 0, 0 < r < 1$,则说 x_t 具有周期性,其周期为 $2\pi/b$.

以上刻画实际上指出 x_t 的自相关关系表现出某种周期性,这与 x_t 的轨道是否具有周期性并无直接关系.

(ii) 谱密度刻画.若函数 $s_x(\omega)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内某点 ω_0 取峰值,则说 x_t 具有周期性,其周期为 $2\pi/\omega_0$.

与相关函数刻画相比,谱密度刻画的直观意义更不明显.

(iii) 贴近度刻画.若主要的总体变量(如GDP、公共开支、失业率等)的谱密度在 $\omega = 0$ 附近互相贴近,则说这些变量所属的经济具有周期性.

与前两种刻画相比,最后这种刻画从数学上看是最含糊不清的.

以上三种刻画在形式上很少有共同之处,在实际上也是互相不可比较的.由观点(i)、(ii)所界定的周期未必一致,也未必是现实的经济周期.

就实际资料所呈现的情况而言,谱密度大多不呈现出明显峰值;与拟想的周期对应的峰值通常平缓宽阔.大多数经济时间序列的典型特征是:当 ω 增加时,$s_x(\omega)$ 急剧下降.

B. 某些例子

(i) 设平稳序列 x_t 的相关函数为

$$R_x(k) = 2^{-|k|}\cos\frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbf{Z}), \tag{30}$$

这是一递降的振荡,其周期为4.用初等方法求出

$$s_x(\omega) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\cos\frac{k\pi}{2}\cos(k\omega) \qquad (\text{用式(3b)})$$

$$= \frac{15}{25 - 16\sin^2\omega},$$

此函数在区间 $(0,\pi)$ 内有一峰值 $s_x(\pi/2) = 5/3$.因恰好有 $2\pi/(\pi/2) = 4$,依相关函数刻画与谱密度刻画得出同一周期.

(ii) 设序列 x_t 的谱密度为

$$s_x(\omega)=\frac{\pi}{2}-\left|\omega-\frac{\pi}{2}\right|, \tag{31}$$

则 $s_x(\omega)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内仅在 $\omega=\pi/2$ 处取得峰值. 其次,依式(5a)有

$$\begin{aligned} R_x(k) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\left|\omega-\frac{\pi}{2}\right|\right)\cos(k\omega)\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)\cos(k\omega)\mathrm{d}\omega+\frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)\cos(k\omega)\mathrm{d}\omega \\ &= -\frac{4}{k^2\pi}\sin^2\frac{k\pi}{4}\cos\frac{k\pi}{2}\quad(k\neq 0), \end{aligned}$$

这表明 $R_x(k)$ 是一个周期为4 的递降振荡. 如同例(i)一样,依谱密度刻画与相关函数刻画的周期一致.

(iii) **Slutsky 序列**,它定义为(1937)

$$x_t=(1+L)^n(1-L)^m\varepsilon_t\quad(t\in\mathbf{Z}), \tag{32}$$

其中 m,n 为自然数. 式(32)意味着,x_t 是对白噪声相继作 m 次一阶差分、再作 n 次两步移动平均的结果. 由式(23),有

$$\begin{cases} g_x(z)=(-1)^m\sigma_\varepsilon^2 z^{-m-n}(1+z)^{2n}(1-z)^{2m}, & (33\text{a}) \\ s_x(\omega)=4^{m+n}\sigma_\varepsilon^2\left(\sin\dfrac{\omega}{2}\right)^{2m}\left(\cos\dfrac{\omega}{2}\right)^{2n}. & (33\text{b}) \end{cases}$$

令 $\varphi(x)=x^m(1-x)^n$, 则 $s_x(\omega)=4^{m+n}\sigma_\varepsilon^2\varphi\left(\sin^2\dfrac{\omega}{2}\right)$. 在区间(0,1)内, $\varphi(x)$ 有唯一极大值点 $x_0=m/(m+n)$; 因而 $s_x(\omega)$ 在 $(0,\pi)$ 内有唯一极大值点

$$\omega_0=2\arcsin\sqrt{x_0}.$$

特别取 $m=n$, 得 $x_0=1/2$, 而 $\omega_0=\pi/2$;

$$g_x(z)=(-1)^n\sigma_\varepsilon^2(z-z^{-1})^{2n}=\sigma_\varepsilon^2\sum_{k=-n}^{n}\binom{2n}{n-k}(-1)^k z^{2k}.$$

由此得出 $R_x(2k)=\sigma_\varepsilon^2(-1)^k\dbinom{2n}{n-k}$ $(0\leqslant|k|\leqslant n)$, 而其他的 $R_x(k)=0$. 当 $|k|\leqslant 2n$ 时 $R_x(k)$ 呈现出周期为4 的振荡.

(iv) **Kuznets 变换**. Kuznets 为处理年度资料 x_t, 采用变换

$$y_t=(L^{-5}-L^5)\cdot\frac{1}{5}(L^{-2}+L^{-1}+1+L+L^2)x_t\triangleq B(L)x_t. \tag{34}$$

由公式(16)有

$$g_y(z)=-\frac{(1-z^5)^2(1-z^{10})^2}{25z^{14}(1-z)^2}g_x(z), \tag{35a}$$

$$s_y(\omega)=\frac{2(1-\cos5\omega)(1-\cos10\omega)}{25(1-\cos\omega)}s_x(\omega)\triangleq G(\omega)s_x(\omega). \tag{35b}$$

$G(\omega)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内有零点 $k\pi/5(k=1,2,3,4)$, 因而 $s_y(\omega)$ 在 $(0,\pi)$ 内可能

出现五个峰值.例如,取 $x_t=\varepsilon_t$,则 $s_y(\omega)$ 在 $(0,\pi)$ 内有五个峰值,离 $\omega=0$ 最近的一个约位于 $\omega=\pi/10$ 处,因而有一个接近于20的周期.当初Kuznets正是用式(34)构成的序列来验证一个长约20年的周期的存在性.但Howrey(1968)用时间序列方法分析的结果指明,长为20的周期源于处理资料的方法,而不是源于资料本身,这就使Kuznets变换失去了可信性.

参考文献

[1] Hamilton J D, Whiteman C H. The observable implications of self-fulfiling expectations[J]. J. Monetary Eco., 1985, 16:353-373.
[2] Malliaris A G, Brock W A. Stochastic Methods in Economics and Finance[M]. Amsterdam: North Holland, 1982.
[3] Sargent T J. Interpreting economic time series[J]. J. Political Eco., 1981, 89:213-248.
[4] Sargent T J. Autoregressions, expectations and advice[J]. Amer. Eco. Rev., 1984, 74:408-415.
[5] Sargent T J. Macroeconomic Theory[M]. 2nd ed. Boston: Academic Press, 1987.
[6] Taylor J B. Estimation and control of a macroeconomic model with rational expectations[J]. Econometrica, 1981, 47:1267-1286.
[7] Turnovsky S J. Methods of Macroeconomic Dynamics[M]. Cambridge: MIT Press, 1995.
[8] Wold H. The Analysis of Stationary Time Series[M]. Uppsada: Almquist & Wicksell, 1938.
[9] 熊大国.随机过程理论与应用[M].北京:国防工业出版社,1991.
[10] 袁震东.近代概率引论[M].北京:科学出版社,1991.

2.2 差分方程

在经济分析中,求解离散时间模型通常归结于解某个(组)差分方程.因此,差分方程是研究离散经济模型的一个基本工具,正如微分方程是研究连续时间经济模型的基本工具一样.

从数学形式上看,对差分方程可作如下分类.

(i) 确定性与随机差分方程.后者是本节考虑的主要对象.

(ii) 线性与非线性差分方程. 前者有可行的求解方法，而后者通常仅限于作某些定性研究. 本节限于考虑线性差分方程.

(iii) 自治与非自治方程. 若方程不显含时间 t，则称为自治方程；否则称为非自治方程. 若一系统的**结构**不随时间变化，则它可由自治方程描述，因而研究方法能明显简化. 宏观经济分析首先考虑结构不随时间变化的系统，因而其首选工具是自治方程.

(iv) 一阶与高阶方程. 作为经济模型，一阶与二阶方程是最常用的，但并不能避免更高阶的差分方程. 原则上，任何高阶方程均可化为一阶向量方程.

本节的主题是常系数线性随机差分方程. 不过，为理解方便，首先概述确定性线性差分方程的基本结论.

2.2.1 确定性差分方程

本小节概述确定性常系数线性差分方程的基本概念与主要结论. 熟悉这些内容之后，转入其随机化推广将是一件很自然的事.

A. 一般概念

设 $x_t(t \in \mathbf{Z})$ 是某个时间序列，它包含了所描述的某个发展过程的全部信息. 不过，通常并不知道 x_t 的明显表达式，甚至不知道 x_t 如何依赖于 t，因而 x_t 是一个未知的离散变量. 但若已知 x_t 联系于其自身历史的某个规则

$$F(x_t, x_{t-1}, \cdots, x_{t-n}) = 0, \tag{1}$$

则有可能由此求出 x_t，或至少推断出 x_t 的某些性质，式(1)就称为关于未知序列 x_t 的 n 阶差分方程. 如果不对 $F(\cdot)$ 作适当限制，就无法展开关于差分方程(1)的理论，这种差分方程就不会有什么利用价值. 无论在理论上还是在应用上，最重要的特殊情况是设定 F 为线性函数. 特别地，我们集中考虑常系数线性差分方程：

$$P(L)x_t = u_t \quad (t \in \mathbf{Z}), \tag{2}$$

其中 $P(L) = \sum_0^n a_j L^j$，$a_j(0 \leqslant j \leqslant n)$ 是常系数，$a_n \neq 0$，不妨设 $a_n = 1$，u_t 是一个已知序列.

在研究方程(2)时，一个关键的启示是：方程(2)与对应的微分方程

$$P(\mathrm{D})x = u(t) \quad (t \in \mathbf{R}) \tag{2$'$}$$

有深刻的类似，其中的微分算子 $\mathrm{D} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 与方程(2)中的延迟算子 L 恰相对应. 首先让我们回忆一下，对于方程(2)$'$有如下基本结论.

(i) 齐次方程 $P(\mathrm{D})x = 0$ 的通解是其 n 个线性无关特解(称为**基本解**)的线性组合，其结构完全取决于特征方程 $P(\lambda) = 0$ 的根的代数性质.

(ii) 方程(2)$'$的通解是其任一特解与齐次方程 $P(\mathrm{D})x = 0$ 的通解之和.

(iii) 依据方程 $P(\lambda) = 0$ 的根可完全确定方程 $P(\mathrm{D})x = 0$ 的解的函数形

式，其中所含 n 个常数取决于 n 个定解条件(如初值条件). 为求方程(2)′的特解，形式上可求助于公式 $x = P(\mathrm{D})^{-1}u$；对于某些特殊的函数 $u(t)$，可依一定形式规则算出 $P(\mathrm{D})^{-1}u(t)$.

非常值得庆幸的是，以上结论可以在非常接近的形式下移植于差分方程(1). 具体的结论将在下面依次展开，总的结论则可简单地表述如下.

定理 方程 $P(L)x_t = 0$ 的通解是其 n 个线性无关特解的线性组合；方程(1)的通解是其任一特解与方程 $P(L)x_t = 0$ 的通解之和.

后一结论实际上并不依赖于 $P(L)$ 的特殊性质，仅取决于 $P(L)$ 的线性算子特征，其证明是很简单的.

B. 一阶方程

首先考虑最简单的一阶线性差分方程

$$(1 - \lambda L)x_t = u_t \quad (t \in \mathbf{Z}), \tag{3}$$

即

$$x_t = \lambda x_{t-1} + u_t.$$

与微分方程 $\dot{x} = \lambda x$ 的通解 $x = c\mathrm{e}^{\lambda t}$ 相对照，容易看出齐次方程 $x_t = \lambda x_{t-1}$ 的通解为 $x_t = c\lambda^t$，c 是任意常数. 因此，非齐次方程(3)有通解

$$x_t = c\lambda^t + z_t, \tag{4}$$

其中 z_t 是方程(3)的任一特解. 考虑以下几种特殊情况.

(i) **后向解**. 直接计算易验证

$$z_t = (1 - \lambda L)^{-1}u_t = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j u_{t-j}$$

是方程(3)的一个特解，只要其右端级数收敛. 当 $|\lambda| < 1$，$\{u_t\}$ 有界时，$\sum_0^{\infty} \lambda^j u_{t-j}$ 必收敛. 在这种情况下，依式(4)可将方程(3)的通解写成

$$x_t = c\lambda^t + \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j u_{t-j}. \tag{4$'$}$$

因式(4)′用 $\{u_s : s \leqslant t\}$ 表示 x_t，故称其为后向解. 因后向解用已知的"历史资料"表示 x 的当前值，故将其用于经济模型更现实. 若 $t < 0 \Rightarrow u_t = 0$，则式(4)′简化为

$$x_t = c\lambda^t + \sum_{j=0}^{t} \lambda^j u_{t-j} \quad (t \geqslant 0),$$

在这种情况下不存在收敛性问题. 若 $u_t \to b$，则由式(4)′有

$$x_t \to b/(1 - \lambda) \quad (t \to \infty),$$

此时说当 $t \to \infty$ 时 x_t 渐近稳定于均衡值 $x^* = b/(1 - \lambda)$. 特别，当 $u_t \equiv b$ 时，x^* 正是方程(3)的不动点.

(ii) **前向解**. 将方程(3)转化为

$$\lambda L(1 - \lambda^{-1}L^{-1})x_t = - u_t,$$

从而形式地得到方程(3)的一个特解

$$z_t = -\lambda^{-1}(1-\lambda^{-1}L^{-1})^{-1}u_{t+1}$$
$$= -\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{-j-1}u_{t+1+j} = -\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{-j}u_{t+j}.$$

只要上式右端级数收敛,就可验证如上的 z_t 确实满足方程(3). 当 $|\lambda|>1$, $\{u_s : s\geqslant t\}$ 有界时, $\sum_1^\infty \lambda^{-j}u_{t+j}$ 必收敛. 在这种情况下,依式(4)可将方程(3)的通解写成

$$x_t = c\lambda^t - \sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{-j}u_{t+j}. \tag{4}''$$

与式(4)′相反,式(4)″用 u_t 的未来值即 $u_s(s\geqslant t)$ 表示 x_t, 故称为前向解. 对于投资、期权一类的经济问题,前向解有其意义.

若 $u_t\to b(t\to\infty)$, 则从式(4)″看出,当 $t\to\infty$ 时 $|x_t|\to\infty$, 除非 $c=0$. 特别,若 $x_t\equiv b$, 则由式(4)″有

$$|x_t| = |c\lambda^t + b/(1-\lambda)|\to\infty\quad(t\to\infty, c\neq 0).$$

若 $\lambda=1$, 则方程(3)的可能的特解是

$$z_t = u_t + u_{t-1} + u_{t-2} + \cdots \qquad (\text{后向解}) \tag{5a}$$
$$= -u_{t+1} - u_{t+2} - \cdots. \qquad (\text{前向解}) \tag{5b}$$

但为使式(5a)或式(5b)中的级数收敛,对 u_t 应有较强的要求. 若 u_t 仅有有限的历史,用式(5a)是不成问题的.

C. 二阶方程

常见的二阶线性差分方程可写成

$$x_t = ax_{t-1} + bx_{t-2} + u_t\quad(t\in\mathbf{Z}), \tag{6}$$

或
$$P(L)x_t \triangleq (1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)x_t = u_t,$$

其中 $a=\lambda_1+\lambda_2, b=-\lambda_1\lambda_2$ 是常数. 分如下三种情况考虑.

(i) λ_1,λ_2 为相异实数的情况. 首先,直接验证齐次方程 $P(L)x_t=0$ 有通解 $c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t$. 于是方程(6)的通解为

$$x_t = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t + z_t\quad(t\in\mathbf{Z}), \tag{7}$$

其中 z_t 是方程(6)的任一特解. 为求得一个 z_t, 仿照上述 B 段中的方法. 若 $|\lambda_1|<1, |\lambda_2|<1$, 则

$$z_t = \frac{1}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)}u_t = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1 L} - \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2 L}\right)u_t$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{j+1}-\lambda_2^{j+1}}{\lambda_1-\lambda_2}u_{t-j},$$

只要上式右端级数收敛. 当 $\{u_t\}$ 有界时,收敛性不成问题. 在这种情况下,式(7)可写成

$$
\begin{aligned}
x_t &= c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{j+1}-\lambda_2^{j+1}}{\lambda_1-\lambda_2}u_{t-j} \\
&= \lambda_1^t\left(c_1 + \sum_{j=-t}^{\infty}\frac{\lambda_1^{j+1}}{\lambda_1-\lambda_2}u_{-j}\right) + \lambda_2^t\left(c_2 + \sum_{j=-t}^{\infty}\frac{\lambda_2^{j+1}}{\lambda_1-\lambda_2}u_{-j}\right) \\
&\triangleq \lambda_1^t c_1(t) + \lambda_2^t c_2(t).
\end{aligned}
\tag{7'}
$$

若 $u_t \to u^*(t\to\infty)$，则从式(7)′得 $x_t \to x^* \triangleq u^*/[(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)]$；特别，当 $u_t \equiv u^*$ 时，x^* 是 x_t 的不动点.

对于情况 $|\lambda_1|>1, |\lambda_2|>1$ 或 $|\lambda_1|<1<|\lambda_2|$，可求得类似于式(7)′的解.

(ii) λ_1,λ_2 是一对共轭复数的情况. 设 $\lambda_1=\bar{\lambda}_2=re^{i\theta}, \sin\theta\neq 0, r>0$. 只考虑 $r<1$ 的情况，$r>1$ 时可类似考虑. 在这种情况下，由式(7)′给出的 x_t 仍为方程(6)的通解，其中 z_t 必为实数. 为使 $c_1\lambda_1^t+c_2\lambda_2^t$ 为实数，只需选取 c_1,c_2 使之满足 $c_1=c_2=\rho e^{i\varphi}$. 以此代入式(7)′，化简后得

$$
x_t = 2\rho\, r^t\cos(t\theta+\varphi) + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sin[(j+1)\theta]}{\sin\theta}r^j u_{t-j}. \tag{8}
$$

(iii) $\lambda_1=\lambda_2\triangleq\lambda$ 的情况. 首先，直接验知齐次方程 $P(L)x_t=0$ 有通解 $(c_1+c_2t)\lambda^t$，于是方程(6)的通解为

$$
x_t = (c_1+c_2t)\lambda^t + z_t.
$$

为求一个特解 z_t，下面设 $|\lambda|<1$($|\lambda|>1$ 的情况可类似考虑). 于是

$$
z_t = (1-\lambda L)^{-2}u_t = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\lambda^j u_{t-j}.
$$

当 $\{u_t\}$ 有界时，上式右端级数收敛，此时方程(6)有通解

$$
\begin{aligned}
x_t &= (c_1+c_2t)\lambda^t + \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\lambda^j u_{t-j} \\
&= \lambda^t\left[c_1 + c_2t + \sum_{j=-t}^{\infty}(j+1+t)\lambda^j u_{-j}\right] \\
&\triangleq \lambda^t[c_1(t)+tc_2(t)].
\end{aligned}
\tag{9}
$$

若 $u_t\to u^*(t\to\infty)$，则由式(9)得 $x_t\to x^*=u^*(1-\lambda)^{-2}(t\to\infty)$.

D. n 阶方程

与方程(6)相对照，只考虑如下形式的 n 阶方程：

$$
P(L)x_t \triangleq \prod_{j=1}^{n}(1-\lambda_j L)x_t = u_t \quad (t\in\mathbf{Z}), \tag{10}
$$

其中 $\lambda_j\neq 0(1\leqslant j\leqslant n)$. 因 λ_j 有很多选择，对于方程(10)很难作一完全的分析. 下面仅考虑两种特殊情况.

(i) 设 λ_j 是互不相同的实数. 首先指出，齐次方程 $P(L)x_t=0$ 有通解

$$x_t = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^t.$$

直接验证 $P(L)\left(\sum_1^n c_j\lambda_j^t\right) = 0$. 反之，若 x_t 满足 $P(L)x_t = 0$，则 x_t 必唯一地取决于 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$. 而由线性方程组(其系数行列式是 Vandermonde 行列式)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^t = x_t \quad (t = 0, 1, \cdots, n-1),$$

可唯一地解出 $c_j = c_j(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$. 因此，方程(10)有通解

$$x_t = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^t + z_t, \tag{11}$$

其中 z_t 是方程(10)的任一特解. 为求出一个 z_t，注意

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{1-\lambda_j z}, \quad A_j = -\frac{\lambda_j}{P'(\lambda_j^{-1})}.$$

于是

$$z_t = \frac{1}{P(L)} u_t = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{1-\lambda_j L} u_t = -\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^{k+1} u_{t-k}}{P'(\lambda_j^{-1})},$$

只要以上级数收敛(例如当 $|\lambda_j| < 1$, $\{u_t\}$ 有界时就是如此). 将所得 z_t 代入式(11)得

$$\begin{aligned} x_t &= \sum_{j=1}^{n} \left[c_j \lambda_j^t - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^{k+1} u_{t-k}}{P'(\lambda_j^{-1})} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^t \left[c_j - \sum_{k=-t}^{\infty} \frac{\lambda_j^{k+1} u_{-k}}{P'(\lambda_j^{-1})} \right] \triangleq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^t c_j(t). \end{aligned} \tag{11$'$}$$

若 $t > 0$ 时 $u_t = 0$ (即在 $t = 0$ 时 u_t 消失)，则 $t \geqslant 0$ 时 $c_j(t)$ 与 t 无关，因而 x_t 是 $\lambda_j^t (1 \leqslant j \leqslant n)$ 的线性组合.

(ii) 设 $\lambda_j = \lambda (1 \leqslant j \leqslant n)$，则齐次方程 $P(L)x_t = 0$ 有通解

$$x_t = \sum_{j=1}^{n} c_j t^{j-1} \lambda^t.$$

其次，

$$z_t = (1-\lambda L)^{-n} u_t = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \lambda^k u_{t-k},$$

只要其右端级数收敛(如设 $|\lambda| < 1$, u_t 有界). 于是方程(10)的通解为

$$x_t = \sum_{j=1}^{n} c_j t^{j-1} \lambda^t + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \lambda^k u_{t-k}. \tag{12}$$

E. 一阶向量方程

方程(3)的 n 维推广是

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{u}_t \quad (t \in \mathbf{Z}), \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{x}_t(t\in\mathbf{Z})$ 是未知的 n 维向量序列，$\boldsymbol{u}_t$ 是已知的 n 维向量序列，$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$. 类似于一维系统，方程(13)的通解为

$$\boldsymbol{x}_t=\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{c}+\boldsymbol{z}_t\quad(t\in\mathbf{Z}),\tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{c}$ 是齐次方程 $\boldsymbol{x}_t=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{t-1}$ 的通解，$\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^n$ 是任意常向量；$\boldsymbol{z}_t$ 是方程(13)的任一特解. 为得出更具体的通解公式，必须有计算 $\boldsymbol{A}^t$ 与 $\boldsymbol{z}_t$ 的有效方法，这与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的性质有关. 下面考虑一个特殊情况：$\boldsymbol{A}$ 是可对角化矩阵，即存在实可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\triangleq\boldsymbol{D},$$

其中 $\lambda_i\in\mathbf{R}(1\leqslant i\leqslant n)$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(i) **$\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{c}$ 的计算.** 令 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{c}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{c}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^t\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^t\boldsymbol{k}=\sum_{i=1}^{n}k_i\lambda_i^t\boldsymbol{P}_i,$$

其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n)\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{P}_i$ 表示矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的第 i 列.

(ii) **$\boldsymbol{z}_t$ 的计算.** 方程(13)可改写为 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}L)\boldsymbol{x}_t=\boldsymbol{u}_t$. 于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}_t&=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}L)^{-1}\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}L)^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{u}_t\\&=\sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^jL^j\boldsymbol{v}_t\quad(\boldsymbol{v}_t=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{u}_t)\\&=\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_1^j\boldsymbol{P}_1,\cdots,\lambda_n^j\boldsymbol{P}_n)\boldsymbol{v}_{t-j}=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^jv_{t-j}^i\boldsymbol{P}_i,\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{v}_t=(v_t^1,v_t^2,\cdots,v_t^n)^{\mathrm{T}}$. 当上式右端级数收敛时(如当 $|\lambda_i|<1$，$\boldsymbol{u}_t$ 有界时)，将已求得的 $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{z}_t$ 代入式(14)得

$$\boldsymbol{x}_t=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^t\boldsymbol{P}_i\Big(k_i+\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_i^{j-t}v_{t-j}^i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^t\boldsymbol{P}_i\Big(k_i+\sum_{j=-t}^{\infty}\lambda_i^jv_{-j}^i\Big)\triangleq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^tk_i(t)\boldsymbol{P}_i.$$

(iii) **稳定性.** 设 $|\lambda_i|<1(1\leqslant i\leqslant n)$，$\boldsymbol{u}_t\to\boldsymbol{u}^*(t\to\infty)$，则依式(14)有

$$\boldsymbol{x}_t\to(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}L)^{-1}\boldsymbol{u}^*=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{u}^*\triangleq\boldsymbol{x}^*\quad(t\to\infty).$$

特别，若 $\boldsymbol{u}_t\equiv\boldsymbol{u}^*$，则 $\boldsymbol{x}^*$ 是式(13)的唯一不动点，此时式(14)为

$$\boldsymbol{x}_t=\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{u}^*=\sum_{i=1}^{n}k_i\lambda_i^t\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{x}^*.\tag{14$''$}$$

2.2.2 随机差分方程

在最一般的意义上，在方程(1)中令 x_t 为未知随机序列，就得到 n 阶随机差分方程. 但如同处理确定性差分方程一样，只有施加特殊限制之后，才可能得到较明确的结果. 实际上，我们仅限于考虑应用上最重要的常系数线性差分方程

$$P(L)x_t=\varepsilon_t\quad(t\in\mathbf{Z}),\tag{15}$$

其中 $P(L)=\prod_1^n(1-\lambda_jL)$，$\lambda_j\neq0(1\leqslant j\leqslant n)$，$\varepsilon_t$ 是白噪声(亦称为新息序列).

对于方程(15),我们要解决如下问题:

(i) 确定解 x_t 为平稳序列并求出函数 $g_x(z)$,$s_x(\omega)$ 与 $R_x(k)$ (依 2.1 节式(1)、式(2));

(ii) 分析谱密度 $s_x(\omega)$ 的特性并讨论由其决定的周期性;

(iii) 求出 x_t 的最小二乘预报公式.

为使以上问题获得较好的解答,假定平稳性条件 $|\lambda_j|<1(1\leqslant j\leqslant n)$ 满足. 在此条件下,$B(z)\triangleq 1/P(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析,$x_t=B(L)\varepsilon_t$ 有定义.

方程(15)看来是很特殊的. 但从 Wold 定理(参考 3.1.2C)看来,形如方程(15)的方程的解,在平稳序列的范围内已具有一定的普遍性.

A. 一阶方程

方程(15)的一阶特例是

$$(1-\lambda L)x_t=\varepsilon_t\quad(0<|\lambda|<1).\tag{16}$$

从方程(16)直接得出一个特解

$$x_t=(1-\lambda L)^{-1}\varepsilon_t=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\varepsilon_{t-j}\quad(t\in\mathbf{Z}).\tag{17}$$

依 2.1.2B,由式(17)表达的 x_t 是一平稳序列,且(用 2.1 节式(23))

$$\begin{cases} g_x(z)=\dfrac{\sigma_\varepsilon^2 z}{(1-\lambda z)(z-\lambda)}, & (18\text{a})\\[2ex] s_x(\omega)=\dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}; & (18\text{b})\end{cases}$$

然后结合式(18a)与 2.1 节式(12b)有

$$\begin{aligned}R_x(k)&=\operatorname{Res}\frac{\sigma_\varepsilon^2 z^k}{(1-\lambda z)(z-\lambda)}\bigg|_{z=\lambda}\\&=\frac{\sigma_\varepsilon^2\lambda^k}{1-\lambda^2}=\lambda^k R_x(0)\quad(k\geqslant 0).\end{aligned}\tag{18c}$$

由式(18c)看出函数 $R_x(k)$ 正好满足齐次差分方程

$$P(L)R_x(k)=0,\qquad P(L)=1-\lambda L.$$

这并非偶然. 实际上,对任何多项式 $P(z)=\sum_0^n a_j z^j$,设 $P(L)x_t=\varepsilon_t$,$P(z)^{-1}=\sum_0^\infty b_j z^j$,则当 $k>0$ 时有

$$\begin{aligned}P(L)R_x(k)&=\sum_{j=0}^n a_j R_x(k-j)=\sum_{j=0}^n a_j\mathrm{E}(x_{t-j}x_{t-k})\\&=\mathrm{E}[x_{t-k}P(L)x_t]=\mathrm{E}(x_{t-k}\varepsilon_t)\\&=\sum_{j=0}^\infty b_j\mathrm{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-j})=0.\end{aligned}$$

其次分析函数 $s_x(\cdot)$ 的特性. 由式(18b)有

$$s_x'(\omega) = \frac{2\lambda\sin\omega}{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)^2},$$

可见 $s_x(\omega)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内为单调函数. 从 2.1.4 小节的观点看来，x_t 不表现出周期性.

最后考虑最小二乘预报. 结合式(17)与 2.1 节式(28)有

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_t x_{t+k} &= [(1-\lambda L)^{-1}L^{-k}]_+ (1-\lambda L)x_t \\ &= \Big(\sum_{j=k}^{\infty}\lambda^j L^{j-k}\Big)(1-\lambda L)x_t = \lambda^k x_t \quad (k \geqslant 0), \end{aligned} \tag{19}$$

$\lambda^k x_t$ 就是 x_{t+k} 的 k 步线性最小二乘预报. 注意，若扰动 ε_t 消失，则由 $x_t = \lambda x_{t-1}$ 解出 $x_{t+k} = \lambda^k x_t$，因此以 $\lambda^k x_t$ 来估计 x_{t+k} 是很自然的. 预报的误差

$$x_{t+k} - \lambda^k x_t = (1-\lambda^k L^k)x_{t+k} = \sum_{j=0}^{k-1}(\lambda L)^j(1-\lambda L)x_{t+k} = \sum_{j=0}^{k-1}\lambda^j\varepsilon_{t+k-j}.$$

B. 二阶方程

方程(15)的二阶特例是

$$P(L)x_t \triangleq (1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)x_t = \varepsilon_t, \tag{20}$$

其中 λ_1,λ_2 满足 $0 < |\lambda_i| < 1$. 令 $\lambda_1+\lambda_2 = a, \lambda_1\lambda_2 = -b$，则方程(20)可写成

$$x_t = ax_{t-1} + bx_{t-2} + \varepsilon_t.$$

由方程(20)解出

$$x_t = P(L)^{-1}\varepsilon_t \triangleq B(L)\varepsilon_t.$$

类似于 2.2.1C 中的做法，下面分三种情况考虑.

(i) λ_1 与 λ_2 是相异实数的情况. 首先，用 2.1 节式(23)得

$$\begin{cases} g_x(z) = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2 z^2}{(1-\lambda_1 z)(1-\lambda_2 z)(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} \\ \qquad = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2 z^2}{(1-az-bz^2)(z^2-az-b)}, & (21\mathrm{a}) \\ s_x(\omega) = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-2\lambda_1\cos\omega+\lambda_1^2)(1-2\lambda_2\cos\omega+\lambda_2^2)} \\ \qquad = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{1+a^2+b^2+2a(b-1)\cos\omega-2b\cos 2\omega}. & (21\mathrm{b}) \end{cases}$$

然后结合式(21a)与 2.1 节式(12b)有

$$\begin{aligned} R_x(k) &= \sum_{i=1,2}\mathrm{Res}\frac{\sigma_\varepsilon^2 z^{k+1}}{(1-\lambda_1 z)(1-\lambda_2 z)(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}\Bigg|_{z=\lambda_i} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2\lambda_1^{k+1}}{(1-\lambda_1^2)(1-\lambda_1\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)} + \frac{\sigma_\varepsilon^2\lambda_2^{k+1}}{(1-\lambda_2^2)(1-\lambda_1\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)} \\ &\triangleq c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k \quad (k \geqslant 0). \end{aligned} \tag{22}$$

注意，对照式(22)与式(7)可看出 $P(L)R_x(k) = 0$.

由式(21b)得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{s_x(\omega)}\right)=2a(1-b)\sin\omega+4b\sin2\omega$$
$$=2\sin\omega[4b\cos\omega-a(b-1)].$$

上式表明,当 $|a(b-1)|<4|b|$ 时,$s_x(\omega)$ 在点

$$\omega_0=\arccos[a(b-1)/4b]$$

取得峰值.

任给 $t\in\mathbf{Z},k>0$,由 2.1 节式(28)有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t x_{t+k}&=[B(L)L^{-k}]_+P(L)x_t\\&=\left[\frac{\lambda_1(1-\lambda_1L)^{-1}-\lambda_2(1-\lambda_2L)^{-1}}{\lambda_1-\lambda_2}L^{-k}\right]_+P(L)x_t\\&=\frac{\lambda_1^{k+1}-\lambda_2^{k+1}+b(\lambda_1^k-\lambda_2^k)L}{\lambda_1-\lambda_2}x_t\\&=\frac{\lambda_1^{k+1}-\lambda_2^{k+1}}{\lambda_1-\lambda_2}x_t+\frac{\lambda_1^k-\lambda_2^k}{\lambda_1-\lambda_2}bx_{t-1},\end{aligned}\tag{23}$$

这给出了第 k 步最小二乘预报公式. 特别取 $k=1$ 得

$$\mathrm{E}_t x_{t+1}=ax_t+bx_{t-1};$$

从 $x_{t+1}=ax_t+bx_{t-1}+\varepsilon_{t+1}$ 看来,这是很自然的.

(ii) $\lambda_1=\bar{\lambda}_2=re^{i\theta}(0<r<1,0<\theta<\pi)$ 的情况. 此时式(21)～式(23)依然有效(尽管 λ_1,λ_2 为复值,注意式(22)、式(23)右端为实值). 式(22)可以写成

$$R_x(k)=2\mathrm{Re}\,\frac{\sigma_\varepsilon^2\lambda_1^{k+1}}{(1-\lambda_1^2)(1-r^2)(\lambda_1-\bar{\lambda}_1)}=2\rho\, r^k\cos(k\theta+\varphi).$$

因 $R_x(\cdot)$ 是偶函数且以 $R_x(0)$ 为最大值,故应取 $\varphi=0$,因此

$$R_x(k)=R_x(0)r^k\cos k\theta\quad(k\geqslant0).\tag{24}$$

注意无论从情况(i)或情况(ii)都可看出 x_t 表现出周期性,但周期 $2\pi/\omega_0$ 与 $2\pi/\theta$ 则未必一致.

(iii) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 的情况. 对这种情况可用同样的方法完成如(i)、(ii)两种情况一样的计算,但更简单的方法是在情况(i)中取极限 $\lambda_2\to\lambda_1=\lambda$ 得到. 于是有

$$\begin{cases}g_x(z)=\dfrac{\sigma_\varepsilon^2z^2}{(1-\lambda z)^2(z-\lambda)^2}, & (25\mathrm{a})\\[2ex] s_x(\omega)=\dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)^2}, & (25\mathrm{b})\\[2ex] R_x(k)=\dfrac{\sigma_\varepsilon^2\lambda^k[k+1-\lambda^2(k-1)]}{(1-\lambda^2)^3}\quad(k\geqslant0); & (25\mathrm{c})\end{cases}$$

$$\mathrm{E}_t x_{t+k}=(k+1)\lambda^k x_t-k\lambda^{k+1}x_{t-1}.\tag{26}$$

不过,因在 $0<\omega<\pi$ 时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{\sigma_\varepsilon^2}{s_x(\omega)}\right]=4\lambda\sin\omega(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)\neq 0,$$

故 $s_x(\omega)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内无峰值，因而与情形(i)、(ii)不同，x_t 不表现出周期性.

C. n 阶方程

现在将以上两段的某些结果推广到 n 阶方程(15)，设 $0<|\lambda_j|<1(1\leqslant j\leqslant n)$，则有

$$x_t=P(L)^{-1}\varepsilon_t\triangleq B(L)\varepsilon_t.$$

(i) 设 λ_j 是互异实数. 首先推广式(21)得

$$\begin{cases} g_x(z)=\dfrac{\sigma_\varepsilon^2 z^n}{\prod_1^n(1-\lambda_j z)(z-\lambda_j)}, & (27\text{a})\\ s_x(\omega)=\dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\prod_1^n(1-2\lambda_j\cos\omega+\lambda_j^2)}; & (27\text{b})\end{cases}$$

然后结合式(27a)与2.1节式(12b)有

$$\begin{aligned} R_x(k)&=\sum_{i=1}^n \mathrm{Res}\frac{\sigma_\varepsilon^2 z^{n+k-1}}{\prod_{j=1}^n(1-\lambda_j z)(z-\lambda_j)}\bigg|_{z=\lambda_i}\\ &=\sum_{i=1}^n\frac{\sigma_\varepsilon^2\lambda_i^{n+k-1}}{\prod_{j=1}^n(1-\lambda_i\lambda_j)\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)}\\ &=\sum_{i=1}^n c_i\lambda_i^k\quad(k\geqslant 0),\end{aligned}\tag{28}$$

这表明 $R_x(k)$ 满足 $P(L)R_x(k)=0$.

在2.2.1D中已指出 $P(L)^{-1}=\sum A_j(1-\lambda_j L)^{-1}, A_j=-\lambda_j/P'(\lambda_j^{-1})$. 于是

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t x_{t+k}&=\left[\sum_{i=1}^n A_i(1-\lambda_i L)^{-1}L^{-k}\right]_+P(L)x_t=\left(\sum_{i=1}^n A_i\sum_{j=k}^\infty \lambda_i^j L^{j-k}\right)P(L)x_t\\ &=\sum_{i=1}^n A_i\lambda_i^k\prod_{j\neq i}(1-\lambda_j L)x_t\quad(k>0).\end{aligned}\tag{29}$$

(ii) 设 $\lambda_j=\lambda(1\leqslant j\leqslant n), 0<|\lambda|<1$. 首先在式(27)中令 $\lambda_j=\lambda$ 得

$$\begin{cases} g_x(z)=\dfrac{\sigma_\varepsilon^2 z^n}{(1-\lambda z)^n(z-\lambda)^n}, & (30\text{a})\\ s_x(\omega)=\dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)^n}; & (30\text{b})\end{cases}$$

然后结合式(30a)与2.1节式(12b)有

$$\begin{aligned}R_x(k)&=\mathrm{Res}\frac{\sigma_\varepsilon^2 z^{n+k-1}}{(1-\lambda z)^n(z-\lambda)^n}\bigg|_{z=\lambda}\\ &=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left[\frac{z^{n+k-1}}{(1-\lambda z)^n}\right]\bigg|_{z=\lambda}\end{aligned}$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k+j}\binom{n+j-1}{j}\frac{\sigma_\varepsilon^2\lambda^{k+2j}}{(1-\lambda^2)^{n+j}}$$

$$=\varphi(k)\lambda^k \quad (k>0), \tag{31}$$

$\varphi(k)$ 是 k 的 $n-1$ 次多项式,因而必有 $(1-\lambda L)^n R_x(k)=0$ (参考2.2.1D).

2.2.3 含期望的差分方程

在2.2.2小节中考虑的差分方程固然是基本的,但对本书中致力于研究的动态宏观模型而言,用得更多的是如下差分方程:

$$\mathrm{E}_t B(L^{-1})x_t = u_t, \tag{32}$$

其中 $\mathrm{E}_t=\mathrm{E}|I_t$ 是条件期望,I_t 是 t 期信息集;

$$B(z)=1-b_1z-\cdots-b_nz^n;$$

x_t 是未知随机序列,u_t 是已知随机序列,假定 I_t 包含 $x_s, u_s(s\leqslant t)$. 对于方程(32),下面将建立标准的求解公式.

A. 解公式

首先指出期望算子 E_t 的某些性质. 以下公式是熟知而常用的:

$$\mathrm{E}\mathrm{E}_t=\mathrm{E}, \quad \mathrm{E}_s\mathrm{E}_t=\mathrm{E}_t=\mathrm{E}_t\mathrm{E}_s \quad (s\geqslant t).$$

一个稍特殊但对于解方程(32)最重要的公式为

$$\mathrm{E}_t A(L^{-1})\mathrm{E}_t=\mathrm{E}_t A(L^{-1}), \tag{33}$$

其中 $A(z)=\sum_0^\infty a_jz^j$. 公式(33)的证明如下:

$$\mathrm{E}_t A(L^{-1})\mathrm{E}_t=\sum_{j=0}^\infty a_j\mathrm{E}_tL^{-j}\mathrm{E}_t=\sum_{j=0}^\infty a_j\mathrm{E}_t\mathrm{E}_{t+j}L^{-j}$$

$$=\sum_{j=0}^\infty a_j\mathrm{E}_tL^{-j}=\mathrm{E}_tA(L^{-1}).$$

利用公式(33),可推出方程(32)有由下式表示的特解:

$$x_t=\mathrm{E}_tB(L^{-1})^{-1}u_t, \tag{34}$$

只要上式右端有意义,该特解即存在.

证 设 x_t 表如式(34),则

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_tB(L^{-1})x_t &=\mathrm{E}_tB(L^{-1})\mathrm{E}_tB(L^{-1})^{-1}u_t\\ &=\mathrm{E}_tB(L^{-1})B(L^{-1})^{-1}u_t \qquad (\text{用式}(33))\\ &=\mathrm{E}_tu_t=u_t,\end{aligned}$$

可见 x_t 满足方程(32). □

为实际应用方便,对公式(33)与公式(34)可作如下形式理解:公式(33)可理解为 $A(L^{-1})$ 与它后面的 E_t 可换,于是

$$\mathrm{E}_tA(L^{-1})\mathrm{E}_t=\mathrm{E}_t\mathrm{E}_tA(L^{-1})=\mathrm{E}_tA(L^{-1}).$$

公式(34)可理解为首先解无期望的方程

$$B(L^{-1})x_t = u_t \Rightarrow x_t = B(L^{-1})^{-1}u_t,$$

然后对所得结果取期望：

$$x_t = \mathrm{E}_t x_t = \mathrm{E}_t B(L^{-1})^{-1}u_t.$$

定义一个与 L 略有差异的延迟算子 $\mathscr{L}$：

$$\mathscr{L}^j \mathrm{E}_t x_s = \mathrm{E}_t x_{s-j} \quad (j,t,s \in \mathbf{Z}).$$

令 $B(L^{-1})^{-1} = \sum_0^\infty a_j L^{-j}$，则公式(34)可写成

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \mathrm{E}_t u_{t+j} = B(\mathscr{L}^{-1})^{-1}\mathrm{E}_t u_t.$$

这就表明，解公式(34)可看作如下**两步**的结果：

(i) 将原方程转化为 $B(\mathscr{L}^{-1})\mathrm{E}_t x_t = \mathrm{E}_t u_t$；

(ii) 解此确定性的差分方程得出 $x_t = \mathrm{E}_t x_t = B(\mathscr{L}^{-1})^{-1}\mathrm{E}_t u_t$.

由此可见，解随机差分方程(32)相当于解一个与之对应的确定性差分方程．这一事实以**确定性等价原理**或**分离原理**著称．

B. 一阶与二阶方程

对于本章中常用的一阶与二阶差分方程，今依公式(34)来求解．

(i) **一阶方程**．方程(32)的一阶特例是

$$\mathrm{E}_t(1 - \lambda L^{-1})x_t = u_t \tag{35}$$

即

$$x_t - \lambda \mathrm{E}_t x_{t+1} = u_t.$$

依公式(34)，从方程(35)解出

$$x_t = \mathrm{E}_t(1 - \lambda L^{-1})^{-1}u_t = \mathrm{E}_t \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j L^{-j} u_t = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \mathrm{E}_t u_{t+j}. \tag{36}$$

公式(36)通常在 $|\lambda| < 1$ 的条件下使用，这样容易保证右端级数的收敛性．注意式(36)表出一个前向解，即它利用 $u_j (j \geqslant t)$ 表出 x_t．对于使用期望 E_t 的方程，这是很自然的．式(36)表明，x_t 由 u_t 的当前与未来期望值决定．这样的结论在动态经济分析中是常用的．

(ii) **二阶方程**．方程(32)的二阶特例是

$$\mathrm{E}_t(1 - \lambda_1 L^{-1})(1 - \lambda_2 L^{-1})x_t = u_t, \tag{37}$$

或

$$x_t - a\mathrm{E}_t x_{t+1} - b\mathrm{E}_t x_{t+2} = u_t,$$

其中 $a = \lambda_1 + \lambda_2, b = -\lambda_1\lambda_2$．设 $0 < |\lambda_1|, |\lambda_2| < 1, \lambda_1 \neq \lambda_2$，则依公式(34)有

$$x_t = \mathrm{E}_t \frac{1}{(1 - \lambda_1 L^{-1})(1 - \lambda_2 L^{-1})} u_t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\mathrm{E}_t\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1 L^{-1}} - \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_2 L^{-1}}\right)u_t$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\mathrm{E}_t \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_1^{j+1} - \lambda_2^{j+1})L^{-j}u_t = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{j+1} - \lambda_2^{j+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}\mathrm{E}_t u_{t+j}. \tag{38}$$

在 u_t 有界的情况下，$|\lambda_1|<1$，$|\lambda_2|<1$ 可保证上式右端级数收敛. 不过，未必总有 $|\lambda_1|<1$，$|\lambda_2|<1$. 若仅有 $|\lambda_1|<1$，则利用公式(36)可从式(37)解出

$$x_t-\lambda_2 x_{t+1}=\mathrm{E}_t(1-\lambda_1 L^{-1})^{-1}u_t=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_1^j \mathrm{E}_t u_{t+j}.$$

参 考 文 献

[1] Dagli C A, Taylor J B. Estimation and solution of linear rational expectation models using a polynomial matrix factorization[J]. J. Eco. Dyn. Control, 1984, 8:341-348.

[2] Futia C A. Rational expectations in stochastic linear models[J]. Econometrica, 1981, 49:171-192.

[3] Hansen L P, Sargent T J. Formulating and estimating dynamic linear rational expectation models[J]. J. Eco. Dyn. Control, 1980, 2:7-46.

[4] Hansen L P, Sargent T J. Anote on Wiener-Kolmogorov Prediction formulas for rational expectation models[J]. Eco. Letters, 1981, 86: 255-260.

[5] 胡适耕，吴付科. 宏观经济的数理分析[M]. 北京：科学出版社，2004.

[6] Muth J F. Optimal properties of exponentially weighted forecasts[J]. J. Amer. Statist. Assoc., 1960, 55:299-306.

[7] Slutzky E. The summation of random causes as the source of cyclic processes[J]. Econometrica, 1937, 5:105-146.

[8] Turnovsky S J, Brock W A. Time consistency and optimal government pocilies in perfect foresight equilibrium[J]. J. Publ. Eco., 1980, 13: 183-212.

[9] Whittle P. Prediction and Regulation by linear Least-Square Methods [M]. 2nd ed. Minneapolis: Univ. of Minnesota Press, 1983.

2.3 消　费

消费理论受到经济学家，尤其是动态宏观经济理论方面的专家的广泛关注. 消费理论中的一些重要观点与Friedman、Muth、Lucas、Hall 等著名经济学家的名字联系在一起. 这一事实有以下几方面的理由. 首先，消费行为无疑是人类最基本的行为，它对于经济运动有着永恒的影响. 其次，消费模型常常为其他经济模型，

如增长模型、投资模型、人口模型、货币模型等提供了基本框架与主要背景. 最后，在宏观经济理论中广泛使用的动态分析方法，如动态最优控制、时间序列分析等，在消费理论中得到典型的应用，因而消费理论往往成为这些分析工具的一个最适当的试验场. 本节正是基于动态最优化与随机序列方法建立消费决策理论.

2.3.1 模型与最优性条件

消费决策模型的一个明显特点是，它处理相对单纯的情况：问题的决策者、决策目标与决策变量都是非常明确而无歧义的. 本书首先尽可能在很一般的条件下描述消费模型及其最优性条件，以使其结论及分析方法便于推广到后面考虑的其他经济模型.

A. 模型描述

给定一代表性消费者，下面也简称其为消费者或个体，假定他是无限存活的. 分别以 c_t、k_t 与 y_t 记消费者在 t 期的消费、资产存量(即其财富)与收入，y_t 可以是工资收入或资产回报以外的任何其他收入，其具体解释不影响模型分析. 以 $R_t = 1 + r_t$ 记从 $t-1$ 期至 t 期的资产总回报率[①]，r_t 就是利率. y_t 与 r_t 取决于消费者处于其中的竞争性市场(如劳务市场与资本市场)，非消费者自身所能决定，因而在消费决策模型中被看作给定的外生变量. 消费者是完全理性的，这意味着他对于自己的消费效用有一个完全精明的估计与极大的追求，同时对于他赖以决策的环境拥有完全的信息(当然限于已显示的信息，须知信息是随时间逐渐显示的). 消费者的决策目标，就是在其自身的预算约束下，选择一个长期消费计划 $c_t (t \geqslant 0)$，以实现其期望折现总效用的最大化. 在数学上，这意味着解如下随机跨时最优决策问题：

$$
\begin{cases}
\max\limits_{c_t} \mathrm{E}_0 \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t), & \text{(1a)} \\
\text{s.t.} \quad k_{t+1} = R_{t+1}(k_t + y_t - c_t), \quad k_0 \text{ 给定}, & \text{(1b)} \\
\qquad k_0 = \mathrm{E}_0 \sum\limits_{t=0}^{\infty} \dfrac{c_t - y_t}{q_t}, \quad q_t = R_1 R_2 \cdots R_t (t \geqslant 1),\ q_0 = 1. & \text{(1c)}
\end{cases}
$$

其中 β^t 是**折现系数**，$0 < \beta = (1+\rho)^{-1} < 1$，$\rho > 0$ 称为**时间偏好率**或主观折现率，它反映未来消费效用在消费者心中的权重：ρ 愈大，未来消费对于消费者愈不重要，消费者愈注重当前的享受. 关于 β 与 ρ 的如上解释将适用于今后遇到的所有跨时最优决策模型. 效用函数 $U(\cdot)$ 仍如第 1 章中一样，无需解释.

---

① 有些文献以 R_t 记 t 期至 $t+1$ 期之间的资产总回报率，但这就与它不能同 k_t，y_t，c_t 一样含于 t 期信息集 I_t 之内不协调.

$\mathrm{E}_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U(c_t)$ 就是在决策时(即 $t=0$ 时)形成的关于未来折现总效用的期望,它依赖于消费者的消费计划 $c_t(t\geqslant 0)$.

方程(1b)表示消费者的**动态预算约束**:下期资产存量等于本期收支余额 $(k_t+y_t-c_t)$ 乘以回报率 R_{t+1}.

方程(1c)表示消费者的**跨时预算约束**:方程(1c)的右端表示消费者对未来折现总净支出的预期,它应恰与消费者的最初资产存量 k_0 平衡. 这就意味着,尽管消费者不必保持每期收支平衡,但他必须实现一生的收支平衡,在其身后既不留下财物,也不留下债务.

下面导出条件(1c)的一等价形式. 注意 $q_t=R_1R_2\cdots R_t$, 由式(1b)有

$$\frac{k_t}{q_t}-\frac{k_{t+1}}{q_{t+1}}=\frac{c_t-y_t}{q_t},\quad k_0=\frac{k_t}{q_t}+\sum_{j=0}^{t-1}\frac{c_j-y_j}{q_j},$$

从而

$$k_0=\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}_0\left(\frac{k_t}{q_t}\right)+\mathrm{E}_0\sum_{t=0}^{\infty}\frac{c_t-y_t}{q_t}.$$

这就表明,等式(1c)成立的充要条件是

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}_0(k_t/q_t)=0. \tag{1c)'$$

直观上,条件(1c)′意味着在决策者的期望中,未来资产存量的折现值应趋于零. 显然,这正是一个理性消费者所要求的. 条件(1c)′通常称为**横截性条件**. 可见,消费者的跨时预算约束与横截性条件相当.

B. 最优性条件

鉴于决策问题(1)依赖于随机序列 r_t 与 y_t, 消费者所制定的消费计划不可能是一个细节上完全确定的未来消费支出的预算表,这样的预算表不是任何精明的消费者能制定出来的! 消费者所能做的,只是制定一个**消费策略**,以最优地应对随机出现的未来环境(即 r_t 与 y_t);这样的最优消费策略在数学上表现为随机最优化问题(1)的最优解. 很少可能得出最优解的显式表达;如果能得出最优解所满足的一定条件(通常称为最优性条件),那么就可以认为已获得关于最优解的重要信息. 因此,关于最优决策问题的最优性条件,是研究最优决策的主要工具.

在数学上,问题(1)是一个离散时间的**随机动态规划**问题,已有成熟的标准方法得出其最优性条件. 下面介绍互相等价的两种方法.

(i) **Bellman 方程法**. 定义问题(1)的**值函数**为

$$V_t(k_t)=\max\ \mathrm{E}_t\sum_{j=t}^{\infty}\beta^{j-t}U(c_j), \tag{2}$$

式(2)中的最大值是相对于预算约束(1b)、预算约束(1c)取的;因决策时间从0

移到了 t，条件(1c)自然应修改为

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{E}_t(k_j/q_j) = 0. \tag{1c}_t$$

依据动态规划理论中的**最优性原理**，值函数 $V_t(\cdot)$ 满足如下的**随机 Bellman 方程**：

$$V_t(k_t) = \max_{c_t}[U(c_t) + \beta \mathrm{E}_t V_{t+1}(k_{t+1})]. \tag{3}$$

由方程(3)得出，最优消费必满足

$$0 = U'(c_t) - \beta \mathrm{E}_t[V'_{t+1}(k_{t+1})R_{t+1}],$$
$$V_t(k_t) = U(c_t) + \beta \mathrm{E}_t V_{t+1}(k_{t+1}),$$
$$V'_t(k_t) = \beta \mathrm{E}_t[V'_{t+1}(k_{t+1})R_{t+1}].$$

利用以上三式消去 $V'_{t+1}(k_{t+1})$，得到

$$U'(c_t) = \beta \mathrm{E}_t[R_{t+1}U'(c_{t+1})], \tag{4}$$

这是一个关于 c_t 的一阶差分方程，称为问题(1)的**Euler 方程**，它就是最优消费 c_t 所应满足的最优性条件. 因它涉及一阶导数，故也称为**一阶条件**. 在某种类似的形式下，Euler 方程(4)首先由 Hall(1978)得到. 值得注意的是，值函数 $V_t(\cdot)$ 并不出现在 Euler 方程(4)中.

(ii) **消除约束法**. 若由约束方程(1b)解出

$$c_t = k_t + y_t - R_{t+1}^{-1}k_{t+1},$$

然后以此代入效用函数，则得到一个以 $k_t(t > 0)$ 为决策变量的无约束最大化问题：

$$\max_{k_t} \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(k_t + y_t - R_{t+1}^{-1}k_{t+1}).$$

由最优性原理，以上问题的解也应满足在 t 期决策的问题

$$\max_{k_j} \mathrm{E}_t \sum_{j=t}^{\infty} \beta^{j-t} U(k_j + y_j - R_{j+1}^{-1}k_{j+1}).$$

这就得出

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial k_{t+1}} \mathrm{E}_t \sum_{j=t}^{\infty} \beta^{j-t} U(c_j) \\ &= \mathrm{E}_t\left[U'(c_t)\frac{\partial c_t}{\partial k_{t+1}} + \beta U'(c_{t+1})\frac{\partial c_{t+1}}{\partial k_{t+1}}\right] \\ &= \mathrm{E}_t[-R_{t+1}^{-1}U'(c_t) + \beta U'(c_{t+1})]. \end{aligned}$$

在 R_t 不具随机性的情况下，以上结果恰与 Euler 方程(4)一致.

方法(ii)不必直接用到值函数与 Bellman 方程，因而是更简便的. 因此，今后在类似的情况下通常使用后一方法.

C. 某些推论

合并方程(1b)与方程(4)，得到关于未知随机序列 c_t, k_t 的一阶差分方程组：

$$\begin{cases} k_{t+1} = R_{t+1}(k_t + y_t - c_t), & (1b) \\ U'(c_t) = \beta E_t[R_{t+1}U'(c_{t+1})]. & (4) \end{cases}$$

原则上，以上方程组应能完全确定**最优消费计划** c_t 与资产存量 k_t 的**最优轨道**. 但在未给出函数 $U(\cdot)$ 的具体形式的情况下，并无解方程组(1b)、方程组(4)的一般方法. 不过，即使不能从方程组(1b)、方程组(4)明显解出 c_t 与 k_t，我们也力求从它发掘出尽可能多的信息. 显然，对 $R_t, y_t, U(\cdot)$ 所作的假定愈强，获得的结论就愈明确，不过这样也就损失更多的普遍性. 为简便起见，本节的一个主要假设是 $R_t \equiv R$，即利率 r 为常数. 这有些背离现实，但对于长期消费趋向的研究似乎是一个可接受的假设. 其次总假定

$$\beta R^2 > 1, \quad 即 \quad \beta R > 1/R. \tag{5}$$

条件(5)显然蕴涵 $R > 1$；而 $\beta R = 1$ 则是一个比条件(5)更强的条件，它意味着 $r = \rho$，即主观折现率与利率一致，这是一个可带来很大方便且在直观上可接受的假设.

因方程(1b)可改写成

$$(1 - R^{-1}L^{-1})k_t = c_t - y_t,$$

故

$$k_t = E_t k_t = E_t(1 - R^{-1}L^{-1})^{-1}(c_t - y_t) = \sum_{j=0}^{\infty} R^{-j} E_t(c_{t+j} - y_{t+j}). \tag{6}$$

至于方程(4)，则可写成

$$E_t[(1 - \beta R L^{-1})U'(c_t)] = 0. \tag{4$'$}$$

但从方程(4)′得不出明确的结论. 这促使我们考虑较特殊的效用函数. 一个特别有趣的选择是取二次效用函数

$$U(c) = c - (m/2)c^2 \quad (0 \leqslant c < 1/m), \tag{7}$$

其中 $m > 0$ 适当小. 以 $U'(c) = 1 - mc$ 代入方程(4)′得

$$E_t[(1 - \beta R L^{-1})(1 - mc_t)] = 0.$$

于是对任给的 $j > 0$ 有

$$\begin{aligned} 0 &= E_t\left\{\frac{1 - \beta^j R^j L^{-j}}{1 - \beta R L^{-1}} E_t[(1 - \beta R L^{-1})(1 - mc_t)]\right\} \\ &= E_t[(1 - \beta^j R^j L^{-j})(1 - mc_t)] \quad (用 2.2 节式(33)) \\ &= 1 - (\beta R)^j - mc_t + m(\beta R)^j E_t c_{t+j}, \end{aligned}$$

故得

$$E_t c_{t+j} = c_t(\beta R)^{-j} + m^{-1}[1 - (\beta R)^{-j}].$$

将上式代入式(6)，经整理后得到(注意 $\beta R^2 > 1$)

$$c_t = \left(1 - \frac{1}{\beta R^2}\right)\left(k_t + \sum_{j=0}^{\infty} R^{-j} E_t y_{t+j}\right) - \frac{\beta R - 1}{m\beta R(R - 1)}. \tag{8}$$

式(8)表明，c_t 决定于当前资产及对未来收入的期望.这就是消费决策问题的最优消费公式，它是一个前向公式.若 $\beta R=1$，即 $R=1/\beta$，则 $E_t c_{t+1}=c_t$，即 c_t 是一个鞅；而式(8)简化为

$$c_t=(1-\beta)\left(k_t+\sum_{j=0}^{\infty}\beta^j E_t y_{t+j}\right)\triangleq y_{pt}. \tag{9}$$

今后将称由式(9)界定的 y_{pt} 为消费者的**持久性收入**，式(9)就是所谓持久性收入理论的一个典型结果.式(9)表明消费者的消费策略是：在任一期 t，以持久性收入 y_{pt} 作为其消费 c_t. 注意为使式(9)有意义，必须 $y_{pt}<1/m$；为此，除了已设 m 适当小之外，还要求 y_t 相对于 $1/m$ 适当小.还可注意，式(9)中完全不出现效用函数的二次项系数 $-m/2$，因而即使将式(7)中的 $-m/2$ 改为 $m/2$，式(9)也是成立的.这一事实在2.4.1小节中将被用到.

2.3.2 消费的表示

式(8)与式(9)给出了用未来收入的期望值表出消费 c_t 的公式，能用来解释一些消费现象.现在我们提出一个新的问题：能否用当前与过去的收入来表出消费 c_t? 更具体地说，希望得到如下的消费表示：

(i) $c_t=(1-\beta)k_t+G(L)y_t+\text{const}$;

(ii) $c_t=G(L)y_t+\text{const}$;

(iii) $c_t=G(L)y_{mt}, y_{mt}=(1-\beta)k_t+y_t$,

其中 $G(L)=\sum_0^{\infty}g_jL^j$，因而消费表示(i)～(iii)都是后向公式(注意消费表示(i)～(iii)中的 $G(L)$ 不必相同).为简单起见，下面设 $\beta R=1$，$U(\cdot)$ 仍依式(7)，因而式(9)成立.如果希望将前向公式(9)反转为上述的后向公式(i)～(iii)，自然要求 y_t 已表为某个后向公式，即 y_t 密切地联系于其历史.于是假定 y_t 有如下 Wold 表示(参考2.1.2C)：

$$y_t=\bar{y}+B(L)\varepsilon_t,\quad B(L)=\sum_{j=0}^{\infty}b_jL^j, \tag{10}$$

其中 b_j 满足 $\sum b_j^2<\infty, b_0=1$，且 $\varepsilon_t=y_t-E_{t-1}y_t$，故称 ε_t 为收入的**更新过程**.

以下推理中用到如下关键结论.

引理(Hansen-Sargent，1980)　若 y_t 表示如式(10)，函数 $B(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上无零点，则如下等式成立：

$$\sum_{j=0}^{\infty}\beta^j E_t y_{t+j}=\frac{\beta B(\beta)\bar{y}}{(1-\beta)B(1)}+\frac{LB(L)-\beta B(\beta)}{(L-\beta)B(L)}y_t. \tag{11}$$

证　将式(10)代入上式后作以下计算：

$$\sum_{j=0}^{\infty}\beta^j E_t y_{t+j}=\frac{\bar{y}}{1-\beta}+\sum_{j=0}^{\infty}\beta^j\sum_{k=0}^{\infty}b_kE_t\varepsilon_{t+j-k}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\overline{y}}{1-\beta} + \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \sum_{k=j}^{\infty} b_k \varepsilon_{t+j-k} \\
&= \frac{\overline{y}}{1-\beta} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k L^k \sum_{j=0}^{k} \beta^j L^{-j} \varepsilon_t \qquad \text{（交换求和号）} \\
&= \frac{\overline{y}}{1-\beta} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k L^k \frac{1-(\beta L^{-1})^{k+1}}{1-\beta L^{-1}} \varepsilon_t \\
&= \frac{\overline{y}}{1-\beta} + \frac{LB(L)-\beta B(\beta)}{(L-\beta)B(L)} (y_t - \overline{y}) \quad \text{（用式(10)）} \\
&= \frac{\beta B(\beta)\overline{y}}{(1-\beta)B(1)} + \frac{LB(L)-\beta B(\beta)}{(L-\beta)B(L)} y_t,
\end{aligned}
$$

如所要证. □

下面依次考虑消费表示(i)～(iii).

A. 后向公式

以式(11)代入式(9)直接得到

$$
\begin{aligned}
c_t &= (1-\beta)\left[k_t + \frac{\beta B(\beta)\overline{y}}{(1-\beta)B(1)} + \frac{LB(L)-\beta B(\beta)}{(L-\beta)B(L)} y_t\right] \\
&= (1-\beta)k_t + G(L)y_t + \beta B(\beta)\overline{y}/B(1), \qquad (12)
\end{aligned}
$$

其中

$$
G(L) = (1-\beta)\frac{LB(L)-\beta B(\beta)}{(L-\beta)B(L)}.
$$

因 $B(0) \neq 0$，$G(z)$ 必可展开为 z 的幂级数，因此

$$
c_t = (1-\beta)k_t + g_0 y_t + g_1 y_{t-1} + \cdots + \text{const}. \qquad (12)'
$$

直观上，式(12)表明，消费者依据当前资产及以往收入序列决定当前消费，而并非仅仅依据当前收入来决定当前消费.

如上所得的 $G(L)$ 依赖于 $B(L)$，因而依赖于 y_t 的表示. 这就表明，不仅消费序列 c_t 依赖于收入序列 y_t，而且用 $\{y_j\}$ 表出 c_t 的函数形式也依赖于序列 y_t. 若收入序列发生变化，则消费 c_t 受到双重影响：y_t 的数值变化改变了 c_t 的量，而 y_t 的结构变化则改变了 c_t 对收入的依赖关系. 这一事实对于消费理论意义重大，值得加以强调. 人们曾经致力于寻求某种普遍适用的消费决策规则，它以某种固定不变的形式表达消费对于收入的依赖，例如表成

$$
c_t = \sum_{j=0}^{\infty} g_j y_{t-j} + \text{const},
$$

其中系数 g_j 与收入序列的结构无关. 而上述结论表明，这原不过是一个误区. 这一思想首先由 Lucas 在其著名的《Critique》(1976)中阐述. 后面建立的几个消费公式亦同样说明了这一点.

考虑由 Muth 提出的以下例子(参看2.1节式(29))：

$$y_t = by_{t-1} + \varepsilon_t + a\varepsilon_{t-1},$$

这相当于在式(10)中取 $\bar{y} = 0, B(L) = (1 + aL)/(1 - bL)$. 于是

$$G(L) = (1-\beta)\left(\frac{L}{L-\beta} - \frac{\beta}{L-\beta}\frac{1+a\beta}{1-b\beta}\frac{1-bL}{1+aL}\right)$$
$$= \frac{(1-\beta)[1+a\beta+aL(1-b\beta)]}{(1-b\beta)(1+aL)}.$$

当 $|a| < 1, |b| \leqslant 1$ 时, $G(z)$ 在 $|z| \leqslant 1$ 上可展开为幂级数. 若 $b = 1$, 则依式(12)有

$$c_t = (1-\beta)k_t + \frac{1+a\beta+aL(1-\beta)}{1+aL}y_t. \tag{13}$$

B. 不含资产的后向公式

今从式(12)中消去 k_t. 如前面已用到的公式

$$k_t = (1-\beta L^{-1})^{-1}(c_t - y_t).$$

这结合式(12)得

$$\frac{(1-\beta L^{-1})c_t}{1-\beta} = c_t - y_t + (1-\beta L^{-1})\frac{LB(L)-\beta B(\beta)}{(L-\beta)B(L)}y_t$$
$$+ (1-\beta L^{-1})\frac{\beta B(\beta)\bar{y}}{(1-\beta)B(1)}$$
$$= c_t - \frac{\beta B(\beta)}{LB(L)}y_t + \frac{\beta B(\beta)\bar{y}}{B(1)}$$
$$= c_t - \frac{\beta B(\beta)}{LB(L)}(y_t - \bar{y});$$

从上式解出 c_t 得

$$c_t = \frac{(1-\beta)B(\beta)}{(1-L)B(L)}(y_t - \bar{y}) \triangleq G(L)(y_t - \bar{y}), \tag{14}$$

其中的 $G(L)$ 当然不必与式(12)中的 $G(L)$ 相同. 式(14)表明 c_t 完全取决于当前与过去的收入.

仍考虑 Muth 的例子. 以 $\bar{y} = 0, B(z) = (1 + az)/(1 - bz)$ 代入式(14)得

$$c_t = \frac{(1-\beta)(1+a\beta)(1-bL)}{(1-b\beta)(1-L)(1+aL)}y_t \tag{15a}$$

$$= \frac{1+a\beta}{1+aL}y_t = \frac{1+a\beta}{1-L}\varepsilon_t \quad (\text{若 } b = 1). \tag{15b}$$

形式地展开式(15b)得

$$c_t = (1+a\beta)(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \cdots). \tag{16a}$$

类似地, 有

$$y_t = \varepsilon_t + (1+a)(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \cdots), \tag{16b}$$

$$k_t = (1-\beta L^{-1})^{-1}(c_t - y_t) = \frac{L}{L-\beta}\left(\frac{1+a\beta}{1-L} - \frac{1+aL}{1-L}\right)\varepsilon_t$$

$$= -\frac{aL}{1-L}\varepsilon_t = -a(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \cdots). \tag{16c}$$

式(16b)表明，$(1+a)\varepsilon_t$ 对增加收入持久地起作用；对式(16a)与式(16c)可作类似的解释.

C. 测定收入

所谓**测定收入**(measured income)定义为

$$y_{mt} = (1-\beta)k_t + y_t, \tag{17}$$

即 y_{mt} 是折现利息收入 $(1-\beta)k_t$ 与非资产收入 y_t 之和. 在类似的形式下，测定收入概念见于Friedman(1956)，Lucas(1976)与Sargent(1976)的工作. 联立式(1b)与(17)解出

$$y_t - \bar{y} = \frac{(1-\beta)Lc_t + (\beta - L)y_{mt}}{\beta(1-L)}, \tag{18}$$

以此代入式(14)消去 y_t，解出 c_t 得

$$c_t = \left[1 - \frac{(1-\beta)^2 B(\beta)L}{\beta(1-L)^2 B(L)}\right]^{-1} \frac{(1-\beta)B(\beta)(\beta - L)}{\beta(1-L)^2 B(L)} y_{mt}$$

$$= \frac{(1-\beta)B(\beta)(L-\beta)}{(1-\beta)^2 B(\beta)L - \beta(1-L)^2 B(L)} y_{mt} \triangleq G(L)y_{mt}. \tag{19}$$

因 $G(0) = (1-\beta)B(\beta)/B(0)$ 有限，故 $G(L)$ 可展开为 L 的幂级数，因而式(19)是一合理的公式. 式(19)表明，最优消费 c_t 取决于当前与过去的测定收入.

仍然以Muth 的例子来解释公式(19). 取 $B(L) = (1+aL)/(1-L)$，则依式(19)算出

$$G(L) = \frac{(1+a\beta)(L-\beta)}{(1-\beta)(1+a\beta)L - \beta(1-L)(1+aL)} = \frac{1+a\beta}{1+a\beta L},$$

于是式(19)可表为

$$c_t = \frac{1+a\beta}{1+a\beta L} y_{mt} = (1+a\beta)\sum_{j=0}^{\infty}(-a\beta)^j y_{m,t-j}, \tag{20}$$

这接近于Friedman 的结果. 若在式(20)中令 $a \to -1$ (相当于取 $y_t = \bar{y} + \varepsilon_t$)，则得到

$$c_t = \frac{1-\beta}{1-\beta L} y_{mt} = (1-\beta)\sum_{j=0}^{\infty}\beta^j y_{m,t-j},$$

这正是Friedman 所用的消费公式，其特点是它与消费者的效用公式有同样的折现系数. 其次，以式(20)代入式(18)消去 c_t，解出

$$y_{mt} = \left[\frac{(1-\beta)L}{\beta(1-L)} \cdot \frac{1+a\beta}{1+a\beta L} + \frac{\beta - L}{\beta(1-L)}\right]^{-1} y_t$$

$$= \frac{1+a\beta L}{1+aL} y_t = \frac{1+a\beta L}{1-L}\varepsilon_t,$$

然后用2.1 节式(28)得

$$
\begin{aligned}
E_t y_{m,t+k} &= \left(\frac{1 + a\beta L}{1 - L} L^{-k} \right)_+ \frac{1 - L}{1 + a\beta L} y_{mt} \\
&= \frac{1 + a\beta}{1 + a\beta L} y_{mt} = c_t, \qquad \text{(用式(20))} \qquad (21)
\end{aligned}
$$

可见 c_t 是对未来任一期的测定收入之预期. 像 $E_t y_{m,t+k} = c_t$ 这样简洁的公式,在经济分析中殊不多见,是很值得珍视的.

2.3.3 各种推广

对问题(1)的分析导致高度简洁与规则的结论,这使得所构成的模型具有令人满意的示范性质,因而为其他许多模型所仿效. 不过,鉴于消费行为所固有的复杂性,对于现有模型完美性的任何幻想都可能被现实所粉碎,对于模型的各种修正是不可避免的. 实际上,从各种不同角度构建的消费理论是如此多样,以至无法作一个最粗略的概括. 下面列举的几个模型,只是在作为模型(1)的补充这一点上有某种代表性,远不能认为已包括已知的主要消费模型. 况且,一旦掌握了构造模型的基本方法,就不难建立一些新的消费模型,使之考虑到某些迄今被忽视的因素. 至于这种新的模型是否导致实质上新的结论,则是另一个问题.

A. 预算约束的修正

预算约束方程(1b)可修正为

$$k_{t+1} = R(k_t - c_t) + y_t \qquad (1b)'$$

或

$$k_{t+1} = Rk_t + y_t - c_t. \qquad (1b)''$$

直观上,方程(1b)′意味着收入 y_t 在 t 期与 $t+1$ 期之间并未转化为带来收益的资本;例如, y_t 是 t 期末进账的. 对方程(1b)″可作类似解释. 从经济意义上说,条件(1b)被替换成条件(1b)′或条件(1b)″之后,问题(1)已不再与原问题一致了.

但我们要立即指出,对于改变后的问题并不需要重新进行分析,只要通过一个简单变换形式上将其转化为原问题就够了. 事实上,若令 $\tilde{y}_t = y_t/R, \tilde{c}_t = c_t/R$,则方程(1b)′与方程(1b)″可分别写成

$$k_{t+1} = R(k_t + \tilde{y}_t - c_t)$$

与

$$k_{t+1} = R(k_t + \tilde{y}_t - \tilde{c}_t),$$

在形式上,这已与方程(1b)一致了. 这样,只要以 $\tilde{y}_t$ 替换 y_t (或还以 $\tilde{c}_t$ 替换 c_t),就可直接使用2.3.1小节与2.3.2小节中的所有结果,而不必重新推导. 甚至不必逐个写出新约束条件下的消费表示,只需举出若干结论作为释例就够了.

仍设 $\beta R = 1, U(\cdot)$ 依式(7). 不妨考虑预算约束(1b)″,则

$$\tilde{U}(\tilde{c}_t) \triangleq R^{-1}U(c_t) = \tilde{c}_t - (\tilde{m}/2)\tilde{c}_t^2, \qquad \tilde{m} = Rm.$$

与式(9)、式(10)、式(12)对应的公式分别是

$$\tilde{c}_t = (1-\beta)\Big(k_t + \sum_{j=0}^{\infty}\beta^j \mathrm{E}_t\tilde{y}_{t+j}\Big),$$

$$\tilde{y}_t = \beta\overline{y} + B(L)\tilde{\varepsilon}_t \quad (\tilde{\varepsilon}_t = \varepsilon_t/R),$$

$$\tilde{c}_t = (1-\beta)k_t + G(L)\tilde{y}_t + \beta^2 B(\beta)\overline{y}/B(1),$$

其中 $G(L)$ 依式(12). 回复到原来的记号 c_t, y_t 得到

$$c_t = (1-\beta)\Big(Rk_t + \sum_{j=0}^{\infty}\beta^j \mathrm{E}_t y_{t+j}\Big),$$

$$c_t = (1-\beta)Rk_t + G(L)y_t + \beta B(\beta)\overline{y}/B(1).$$

分别将以上公式与式(9)、式(12)比较,可以发现其改变是轻微且简单的.

B. 一个消费投资模型

如同上段一样,依然使用约束(1b)″,且设 $\beta R = 1$, 但以所谓纯收入或可支配收入

$$y_{nt} = rk_t + y_t \tag{22}$$

替代与之类似的测定收入 y_{mt} (依式(17)). 我们的目标是:以 y_{nt} 表出 $I_t \triangleq \Delta k_{t+1} = k_{t+1} - k_t$, I_t 理解为消费者的投资. 鉴于(用上段的记号)

$$\tilde{y}_{nt} \triangleq \beta y_{nt} = (1-\beta)k_t + \tilde{y}_t = \tilde{y}_{mt},$$

如同上段中指出的,我们并不需要新的数学推导,只需套用 2.3.2C 中的结果就够了. 于是

$$\begin{aligned}
I_t &= rk_t + y_t - c_t && (\text{用式(1b)″}) \\
&= y_{nt} - c_t && (\text{用式(22)}) \\
&= R(\tilde{y}_{mt} - \tilde{c}_t) \\
&= R\left[1 - \frac{(1-\beta)B(\beta)(L-\beta)}{(1-\beta)^2 B(\beta)L - \beta(1-L)^2 B(L)}\right]\tilde{y}_{mt} && (\text{用式(19)}) \\
&= \frac{\beta(1-L)[(1-\beta)B(\beta) - (1-L)B(L)]}{(1-\beta)^2 B(\beta)L - \beta(1-L)^2 B(L)} y_{nt} \triangleq G(L)y_{nt}.
\end{aligned} \tag{23}$$

$G(z)$ 可展开为 z 的幂级数,因而式(23)是一合理的后向公式. 式(23)表明,最优投资 I_t 取决于当前与过去的纯收入.

还是以 Muth 的例子来解释公式(23). 取 $B(L) = (1+aL)/(1-L)$, 则

$$G(L) = \frac{\beta(1-L)[1+a\beta-(1+aL)]}{(1-\beta)(1+a\beta)L - \beta(1-L)(1+aL)} = \frac{a\beta(L-1)}{1+a\beta L}.$$

于是依式(23)有

$$I_t = \frac{a\beta(L-1)}{1+a\beta L}y_{nt} = \sum_{j=1}^{\infty}(-a\beta)^j(y_{n,t-j+1} - y_{n,t-j}). \tag{24}$$

公式(24)可解释为:当前投资是过去纯收入年增量的加权和,权数就是 $(-a\beta)^j$, 注意 $|a\beta| \leqslant \beta < 1$.

为得出公式(23)，亦可用 2.3.2C 中的方法，而不必套用 2.3.2C 中的结果. 首先联立式(1b)″与式(22)解出

$$y_t = \frac{rLc_t + (1 - RL)y_{nt}}{1 - L};$$

然后与 $k_t = (L^{-1} - R)^{-1}(y_t - c_t)$ 及

$$c_t = (1 - \beta)\left[Rk_t + \frac{LB(L) - \beta B(\beta)}{(L - \beta)B(L)}(y_t - \bar{y})\right]$$

一起求出 c_t；最后由 $I_t = y_{nt} - c_t$ 即得出式(23). 当然，这需要作较多的计算. 总之，尽可能利用已知结果是十分重要的.

C. 临时消费

因 $c_t = y_{pt}$，即消费永远与持久性收入一致(依式(9))，除了收入变化所引起的波动之外，消费并无自身的波动，这就将消费行为完全理想化了. 实际上，如 Friedman 等人所指出的，消费亦可能存在并非收入变化引起的随机波动，即出现所谓临时消费(Friedman 用语)，它取决于消费者的兴趣或偏好的随机变化. 为了反映这种随机波动，对模型的改变依赖于效用函数的修正. 今将式(7)修改为

$$U(c_t) = (1 + mu_t)c_t - (m/2)c_t^2, \tag{25}$$

其中 u_t 是一白噪声，假定它与 y_t 互相正交，$E_t u_j = u_j (j \leqslant t)$. 由式(25)得出 $U'(c_t) = 1 - mc_t + mu_t$. 以此代入 Euler 方程(4)，得到

$$E_t[(1 - L^{-1})(c_t - u_t)] = 0,$$

其中仍用到条件 $\beta R = 1$. 然后如同在 2.3.1C 中所作的一样得出

$$E_t c_{t+j} = E_t L^{-j}(c_t - u_t) = E_t(c_t - u_t) = c_t - u_t \quad (j \geqslant 1). \tag{26}$$

式(26)表明，最优消费 c_t 已不再是一个鞅，除非 $u_t \equiv 0$. 这就对 Hall 的基本结论(c_t 是一个鞅)作出了修正，且这一修正源于消费者消费倾向的随机波动.

以式(26)取代 $E_t c_{t+j} = c_t (j \geqslant 1)$，2.3.1 小节与2.3.2 小节中的所有公式都应作相应修正. 这一修正的过程并无实质性的困难，因而无需详细列举所有经修正后的结果. 不过，指出最开头的几步，对于修正模型获得某种更具体的印象，还是有益的.

以式(26)代入式(6)后得

$$k_t = \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j (c_t - u_t - E_t y_{t+j}) + c_t - y_t = \frac{c_t - \beta u_t}{1 - \beta} - \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j E_t y_{t+j};$$

由此解出 c_t，即得到式(9)的如下推广：

$$c_t = (1 - \beta)\left(k_t + \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j E_t y_{t+j}\right) + \beta u_t = y_{pt} + \beta u_t. \tag{27}$$

与式(9)相比，式(27)右端多出的一项 βu_t 就是临时消费，它与 y_{pt} 无关. 直接由式(27)与式(26)推出

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t y_{p,t+j} &= \mathrm{E}_t(c_{t+j} - \beta u_{t+j}) \\ &= c_t - u_t = y_{pt} - (1-\beta)u_t \quad (j \geqslant 1).\end{aligned}$$

D. 生产力冲击

在问题(1)中，目标函数的改进余地是很有限的，主要的修正集中在预算约束上. 在A段中已提出两种轻微的修正，作其他选择的余地还相当大. 约束条件(1b)(或条件(1b)′、条件(1b)″)的特点是，除资产的利息收入之外，其他收入都笼统地装进 y_t 这只口袋中了. 这显然是一种高度的简化. 更细化的处理不免要涉及消费者的投资与生产行为，当然这样一来，我们就从单纯的消费理论进入其他领域了，而这并不是本节的任务，下面仅以一种最简单的形式触及消费者的生产行为.

假设消费者如此介入生产过程，使得他的预算约束(1b)代之以条件

$$k_{t+1} = f_t(k_t) - c_t. \tag{28}$$

不妨这样解释条件(28)：消费者将其全部资产 k_t 投资于一家公司(可设想该公司正是消费者独自经营的)，其生产函数为 $y_t = f_t(k_t)$，y_t 是消费者的唯一收入，而 $y_t - c_t$ 成为下期的生产投入. 生产函数 $f_t(\cdot)$ 与 t 有关表明，生产过程经受某种不间断的扰动，即本段标题所称的生产力冲击.

为求问题的最优性条件，用2.3.1B 中的方法(ii)，即以 $c_t = y_t - k_{t+1}$ 代入效用函数，然后得出一阶条件

$$0 = \mathrm{E}_t\left[\frac{\partial}{\partial k_{t+1}}\sum_{j=t}^{\infty}\beta^{j-t}U(c_j)\right] = \mathrm{E}_t[-U'(c_t) + \beta U'(c_{t+1})f'_{t+1}(k_{t+1})],$$

即

$$U'(c_t) = \beta \mathrm{E}_t[U'(c_{t+1})f'_{t+1}(k_{t+1})], \tag{29}$$

这就是与式(4)对应的 Euler 方程. 要从方程(29)明确地求出最优消费与资本的最优路径，当然必须对 $U(\cdot)$ 与 $f_t(\cdot)$ 作出更强的假定.

考虑如下特殊情况：设 $U(c) = \ln c$，$f_t(k) = A_t k^\alpha$，$A_t > 0$，$0 < \alpha < 1$，则代入方程(29)后得出

$$c_t^{-1} = \alpha\beta \mathrm{E}_t[A_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}/c_{t+1}]. \tag{30}$$

试以 $c_t = by_t$ 代入式(30)进行检验：

$$\frac{1}{\alpha\beta c_t} = \mathrm{E}_t\left[\frac{A_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}}{bA_{t+1}k_{t+1}^{\alpha}}\right] = \mathrm{E}_t\left[\frac{1}{bk_{t+1}}\right] = \mathrm{E}_t\left[\frac{1}{b(y_t - c_t)}\right] = \frac{1}{(1-b)c_t},$$

这就得出 $b = 1 - \alpha\beta$，从而

$$c_t = (1-\alpha\beta)y_t = (1-\alpha\beta)A_t k_t^\alpha \tag{31}$$

就是所求的最优消费计划. 由式(31)可作出以下结论：

(i) 产出 y_t 被分为消费 $(1-\alpha\beta)y_t$ 与下期投入 $\alpha\beta y_t$ 这两部分，分配比例固定不变，不受生产力冲击(体现为 A_t)的影响；

(ii) 生产力冲击 A_t 通过 $k_{t+1}=\alpha\beta y_t$ 传递到下期，进而影响到全过程；

(iii) 利用等式 $\ln k_{t+1}=\alpha\ln k_t+\ln A_t+\text{const}$，可通过某个线性回归估计来确定参数 α.

2.3.4 资产定价模型

消费决策模型的最令人注意的应用之一就是由其导出资产定价公式，这类公式为股票市场或其他证券市场的理论分析提供了依据，或至少提供了有益的启示.

A. 定价公式

为达到预定目的所需的模型基于对问题(1)的改造，主要是修正预算约束方程(1b)，使之考虑到多种有不同收益率的资产. 设消费者可自由地选择 $n+1$ 种资产 $i=0,1,\cdots,n$，资产 i 的利率为 r^i，$R^i=1+r^i(0\leqslant i\leqslant n)$，约定资产0是**无风险资产**或**安全资产**，令 $r=r^0$；而其他资产为**风险资产**，这意味着 $r_t^i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是随机序列，随机性即意味着风险(今后应始终保持这一理解)[①]. 消费者为分散风险，通常选择某个适当的**资产组合**，这意味着选择资产 i 的份额 ω^i，使得 $\sum_0^n\omega^i=1$. 约定

$$R_{t+1}=\sum_{i=0}^{n}\omega_t^iR_{t+1}^i=\sum_{i=1}^{n}\omega_t^iR_{t+1}^i+R_{t+1}^0\Big(1-\sum_{i=1}^{n}\omega_t^i\Big). \tag{32}$$

消费者选择 c_t 与 $\omega_t^i(1\leqslant i\leqslant n)$，解如下消费效用最大化问题：

$$\begin{cases}\max\limits_{c_t,\omega_t^i}\mathrm{E}_0\sum\limits_{t=0}^{\infty}\beta^tU(c_t), & (33\text{a})\\ \text{s.t.}\quad k_{t+1}=R_{t+1}(k_t+y_t-c_t),\quad R_{t+1}\text{依式(32)}. & (33\text{b})\end{cases}$$

问题(33)中的 $\beta,U(\cdot)$ 与 k_t 如同问题(1)，不必解释.

从形式上看，条件(33b)与条件(1b)并无区别，因而问题(33)的最优性条件自然包括了Euler方程(4)，但是还不够，选择变量 $\omega_t^i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的出现使得需要一组新的一阶条件：

$$\begin{aligned}0&=\mathrm{E}_t\Big[\frac{\partial U(c_t)}{\partial\omega_t^i}\Big]=\mathrm{E}_t\Big[U'(c_t)\frac{\partial c_t}{\partial\omega_t^i}\Big]\\&=\mathrm{E}_t\Big[U'(c_t)R_{t+1}^{-2}k_{t+1}\frac{\partial R_{t+1}}{\partial\omega_t^i}\Big] &&\text{(用式(33b))}\\&=\mathrm{E}_t[U'(c_t)R_{t+1}^{-2}k_{t+1}(r_{t+1}^i-r_{t+1})] &&\text{(用式(32))}\end{aligned}$$

---

① 在日常用语中，“风险”一词多少包含有负面的意义. 与此不同，在经济学中“风险”应完全作为一个中性术语使用，它除了体现结果不确定之外，别无它意；或者说，风险就是随机性. 当你将风险与祸害联系在一起时，就应想到风险亦可能与机遇联系在一起.

$$=\mathrm{E}_t[\beta U'(c_{t+1})R_{t+1}^{-1}k_{t+1}(r_{t+1}^i-r_{t+1})] \qquad (用式(4))$$
$$=\beta(k_t+y_t-c_t)\mathrm{E}_t[U'(c_{t+1})(r_{t+1}^i-r_{t+1})], \qquad (用式(33b))$$

即

$$\mathrm{E}_t[U'(c_{t+1})(r_{t+1}^i-r_{t+1})]=0 \quad (1\leqslant i\leqslant n). \tag{34}$$

由式(34)进而得出

$$\mathrm{E}_t[U'(c_{t+1})]\mathrm{E}_t(r_{t+1}^i-r_{t+1})+\mathrm{cov}_t(U'(c_{t+1}),r_{t+1}^i-r_{t+1})=0,$$

从而

$$\mathrm{E}_t r_{t+1}^i-r_{t+1}=-\frac{\mathrm{cov}_t(U'(c_{t+1}),r_{t+1}^i)}{E_t[U'(c_{t+1})]} \quad (1\leqslant i\leqslant n). \tag{35}$$

这就是所谓**消费资本资产定价公式**(CAPM),它表示风险资产 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的**风险溢价**($\mathrm{E}_t r_{t+1}^i-r_{t+1}$)与协方差 $\mathrm{cov}_t(U'(c_{t+1}),r_{t+1}^i)$ 负相关.

定价公式(35)尽管简洁而富有启发性,但仍然是欠明朗的.为增强其表现力,除了选择特殊的效用函数之外,另一途径是将右端代以某个一阶近似.为此,定义序列 x_t 的增长率 g_x 为

$$g_{xt}=\frac{\Delta x_t}{x_{t-1}}=\frac{x_t-x_{t-1}}{x_{t-1}}. \tag{36}$$

于是消费增长率 $g_{ct}=\Delta c_t/c_{t-1}$. 为简便记,下面令 $g_t=g_{ct}$. 当 Δc_{t+1} 充分小时,由微分公式有

$$U'(c_{t+1})\approx U'(c_t)+U''(c_t)\Delta c_{t+1}=U'(c_t)(1-\sigma_t g_{t+1}),$$

其中 $\sigma_t=-c_tU''(c_t)/U'(c_t)$ 是效用函数 $U(\cdot)$ 的相对风险厌恶系数,它一般与 t 有关,除非 $U(\cdot)$ 是CRRA 效用函数或者 $c_t\equiv c$. 将以上结果代入式(35)得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t r_{t+1}^i-r_{t+1}&\approx-\frac{\mathrm{cov}_t(1-\sigma_t g_{t+1},r_{t+1}^i)}{\mathrm{E}_t(1-\sigma_t g_{t+1})}\\&\approx\sigma_t\mathrm{cov}_t(g_{t+1},r_{t+1}^i)(1+\sigma_t\mathrm{E}_t g_{t+1})\\&\approx\sigma_t\mathrm{cov}_t(g_{t+1},r_{t+1}^i),\end{aligned}$$

其中认定 g_{t+1} 是充分小的量(与 Δc_{t+1} 同阶),因而可略去 g_{t+1}^2. 这就得到

$$\mathrm{E}_t r_{t+1}^i-r_{t+1}\approx\sigma_t\mathrm{cov}_t(g_{t+1},r_{t+1}^i), \tag{37}$$

或略去时间指标,简写为

$$\mathrm{E}r^i-r\approx\sigma\mathrm{cov}(g_c,r^i). \tag{37$'$}$$

公式(37)表明,风险溢价与 $\mathrm{cov}(g_c,r^i)$ 成正比;消费增长率与 r^i 相关性愈大,资产 i 的期望收益率就愈高;若 g_c 与 r^i 正相关,则 σ 愈大(即消费者愈厌恶风险),资产 i 的期望价格也愈高.

B. β 系数

现在给出资产定价公式(35)的一个重要特殊形式.设有某个复合资产 m,其利率 r^m 满足条件

$$U'(c_t) = \text{const } r_t^m. \tag{38}$$

以 r^m 代替 r^i，由式(35)得

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_t r_{t+1}^m - r_{t+1} &= -\frac{\mathrm{cov}_t(U'(c_{t+1}), r_{t+1}^m)}{\mathrm{E}_t[U'(c_{t+1})]} \\ &= -\mathrm{Var}_t(r_{t+1}^m)/\mathrm{E}_t r_{t+1}^m. \qquad (\text{用式}(38)) \end{aligned}$$

将此式再用到式(35)得

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_t r_{t+1}^i - r_{t+1} &= -\frac{\mathrm{cov}_t(r_{t+1}^m, r_{t+1}^i)}{\mathrm{E}_t r_{t+1}^m} \qquad (\text{用式}(38)) \\ &= -\frac{\mathrm{cov}_t(r_{t+1}^m, r_{t+1}^i)}{\mathrm{Var}_t(r_{t+1}^m)} \frac{\mathrm{Var}_t(r_{t+1}^m)}{\mathrm{E}_t r_{t+1}^m}, \end{aligned}$$

故得

$$\mathrm{E}_t r_{t+1}^i - r_{t+1} = \beta_t^i(\mathrm{E}_t r_{t+1}^m - r_{t+1}) \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{39}$$

其中

$$\beta_t^i = \mathrm{cov}_t(r_{t+1}^m, r_{t+1}^i)/\mathrm{Var}_t(r_{t+1}^m). \tag{40}$$

式(39)是应用金融学中广泛使用的一个公式，它给出了预期资产价格 $\mathrm{E}_t r_{t+1}^i$ 与预期市场价格 $\mathrm{E}_t r_{t+1}^m$ 之间的一个简单的线性关系，通常称为**证券市场线方程**. 当然，$\mathrm{E}_t r_{t+1}^m$ 能否起市场价格的作用取决于资产 m 的构成. 可设想 m 是市场所有可交易资产构成的复合资产，因而其价格不妨就看作资产的市场价格；或者干脆说，资产 m 就代表了市场！于是公式(39)意味着，给定资产 i 的风险溢价与期望市场利率超出安全资产利率的部分成比例，β^i 就是比例系数. 依据资产 i 与 m 的相关性质，系数 β^i 可正、可负，亦可为零，因而消费者期望的风险溢价亦可正、可负或为零. 与公式(35)相比，公式(39)的明显优点是它不直接涉及消费者的偏好，系数 β^i 可通过一个简单的回归估计得出. 这就使公式(39)在商业中被方便地应用. 公式(39)特别被用于股票市场分析，而 m 被理解为整个股票市场.

C. Lucas 模型

Lucas 提出了一个很独特的资产定价模型. 设有 n 种风险资产 $i(=1,2,\cdots,n)$，资产 i 的价格为 p_t^i，单位资产 i 的红利为 d_t^i，令

$$\boldsymbol{p}_t = (p_t^1, p_t^2, \cdots, p_t^n)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{d}_t = (d_t^1, d_t^2, \cdots, d_t^n)^{\mathrm{T}}.$$

以 $\boldsymbol{x}_t = (x_t^1, x_t^2, \cdots, x_t^n)^{\mathrm{T}}$ 记消费者在 t 期至 $t+1$ 期之间所持的资产组合，则消费者的预算约束为

$$\boldsymbol{p}_t^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_{t+1} = (\boldsymbol{p}_t + \boldsymbol{d}_t)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_t - c_t. \tag{41}$$

设进入均衡状态之后 $\boldsymbol{x}_t \equiv \boldsymbol{x}$，则由式(41)得出 $c_t = \boldsymbol{d}_t^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}$，即消费者将资产收益全部用于消费，这意味着收益是不可储存的. Lucas 用“果树”来解释资产，收益就是“果实”，它必须在当期消费掉. 这一“果树模型 ”初看起来似不现实，但它颇能说明问题.

现在来求出问题(1a)、方程(41)的最优性条件. 从方程(41)解出 c_t，代入效用函数，然后得出一阶条件：

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \mathrm{E}_t\left[\frac{\partial U(c_t)}{\partial \boldsymbol{x}_{t+1}} + \beta \frac{\partial U(c_{t+1})}{\partial \boldsymbol{x}_{t+1}}\right] \\ &= \mathrm{E}_t[-U'(c_t)\boldsymbol{p}_t + \beta U'(c_{t+1})(\boldsymbol{p}_{t+1} + \boldsymbol{d}_{t+1})],\end{aligned}$$

这就是一阶向量差分方程

$$\mathrm{E}_t[(1-\beta L^{-1})U'(c_t)\boldsymbol{p}_t] = \beta \mathrm{E}_t[L^{-1}U'(c_t)\boldsymbol{d}_t]. \tag{42}$$

式(42)可看作问题(1a)、方程(41)的Euler 方程.

利用2.2 节中的式(34)与式(33)，从方程(42)解出

$$\begin{aligned}U'(c_t)\boldsymbol{p}_t &= \mathrm{E}_t[(1-\beta L^{-1})\beta L^{-1}U'(c_t)\boldsymbol{d}_t] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\beta^j \mathrm{E}_t[U'(c_{t+j})\boldsymbol{d}_{t+j}],\end{aligned}$$

这就得出资产定价公式

$$\boldsymbol{p}_t = \sum_{j=1}^{\infty}\beta^j \mathrm{E}_t[\boldsymbol{d}_{t+1}U'(c_{t+j})/U'(c_t)]. \tag{43}$$

式(43)表明，价格向量 $\boldsymbol{p}_t$ 取决于对未来(含当前)资产红利及边际效用的预期. 这一结论无疑是合理的.

要从式(43)得出更具体的公式，必须对效用函数 $U(\cdot)$ 作更特殊的假设. 考虑如下两种特殊情况.

(i) 设 $U''(\cdot) = 0$ (消费者风险中性)，则式(43)简化为

$$\boldsymbol{p}_t = \sum_{j=1}^{\infty}\beta^j \mathrm{E}_t\boldsymbol{d}_{t+j},$$

这意味着，资产价格是对未来折现总红利的预期. 直观上，这一结论的意义是明显的.

(ii) 设 $U(c) = \ln c$，且设 $n=1, x_t = 1$ (消费者保持拥有一株“果树”)，则依式(41)有 $c_t = d_t$，于是由式(43)有

$$p_t = \sum_{j=1}^{\infty}\beta^j d_t = \frac{\beta d_t}{1-\beta}.$$

在这种情况下，p_t 仅取决于当期红利 d_t.

参考文献

[1] Alessie R, Lusardi A, Consumption, saving and habit formation[J]. Eco. Letters, 1997, 55:103-108.

[2] Campbell J Y, Cochrane J H. By force of habit: a consumption-based

explanation of aggregate stock market behavior[J]. J. Political Eco., 1999, 107:205-251.

[3] Carroll C D. Solving consumption models with multiplicative habits[J]. Eco. Letters, 2000, 68:67-77.

[4] Carroll C D, Kimball M S. On the concavity of the comsumption function[J]. Econometrica, 1996, 64:981-992.

[5] Deaton A S. Understanding Consumption[M]. Oxford: Oxford Univ. Press, 1992.

[6] Duffie D J, Epstein L G. Asset pricing with stochastic differential utility [J]. Rev. Financial Studies, 1992,5:411-436.

[7] Epstein L G, Zin S E. Substitution, risk aversion and the temporal behavior of consumption and asset returns[J]. Econometrica, 1989, 57: 937-969.

[8] Flavin M A. The adjustment of consumption to changing expectations about future income[J]. J. Political Eco., 1981, 89:974-1009.

[9] Friedman M A. Theory of the Consumption Function[M]. New Jersey: Princeton Univ. Press, 1956.

[10] Hall R E. Stochastic implications of the life cycle-permanent income hypothesis: theory and evidence[J]. J. Political Eco., 1978,86:971-987.

[11] Hansen L P, Singleton K J. Stochastic consumption, risk aversion and the temporal behavior of asset returns[J]. J. Political Eco., 1983, 91: 249-265.

[12] Kimball M S. Precautionary saving in the small and in the large[J]. Econometrica, 1990, 58:53-73.

[13] Lucas R E. Econometric polycy evaluation: a critique [C]. In the Phillips Curve and the Labor Market, 1976.

[14] Obstfeld M. Evaluating risky consumption paths: the role of intertemporal substitutabiliby[J]. European Eco. Rev., 1994, 38: 1471-1486.

[15] Rodriguez A. Precautionary saving and economic growth[J]. J. Monetary Eco., 1999, 21:219-239.

[16] Sargent T J. Rational expectations, econometric exogeneity and consumption[J]. J. Political Eco., 1980, 86:673-700.

2.4　税收与政府开支

上节的方法经适当改造之后可用于政府决策问题.政府决策行为对于宏观经济运行的重要性是不言而喻的.宏观经济模型通常涉及某种形式的政策分析，本节并不能给出这类分析的系统讨论，只是在联系于消费决策模型的角度给出几个较简单的政策决策模型.

政府决策主要涉及三个变量：税收 T_t，政府开支 G_t 与政府债券 B_t（准确地说，B_t 记未偿政府债券存量或国债余额）.政府主要依靠税收来实现政府开支.但政府开支不可避免地受到各种不可控制的因素的影响而出现随机波动，通常未必恰好有 $G_t = T_t$，由此产生的政府财政缺口由发行国债来平衡.政府对这些变量的调控，无疑是一个复杂的动态决策过程.按照本书的基本思路，将政府决策纳入到某个跨时最优决策模型的框架之内，固然难免有简单化之嫌，但亦不失为一种可供选择的方法.

不过，经过初步的考察就会发现，政府决策问题远不像消费者决策问题那样单纯.首要的问题是：政府的决策目标是什么？消费者追求效用最大化，厂商追求利润最大化，投资者追求收益最大化，这些都是非常明确而毫无疑义的.但政府的决策目标似乎并不明确；相应地，决策变量似乎也并非注定不变.政府作为社会利益的代表，似乎主要关注政府开支 G_t 的选择，并以实现社会福利最大化为其目标；但实际上，政府开支在很大程度上是一个由历史与环境决定的量，政府自主选择的余地可能很小.或许，政府更加关注如何调节税收与债务，以实现财政稳定为其目标.总之，政府的决策目标未必是单一的，其主要决策目标可能随环境或体制的变更而改变.由此而形成的复杂情况只能由多种不同的模型来描述.因此，出现一些形式各异的政府决策模型是很自然的事情.本节所考虑的政府决策模型，自然只是多种可用模型的特例.

2.4.1　最优税收模型

下面考虑由 R. Barro(1979)提出的模型，它以实现某种最优税收为政府决策目标.从方法上考虑，该模型的价值在于，它以税收的形式重建了持久性收入的消费理论，从而显示出政府决策与消费者决策之间令人惊异的深刻类似性.

A. 模型与最优性条件

Barro 认为，政府开支 G_t 是一个非政府所能选择的随机过程.另一方面，政府能够调整税收 T_t. 从长期来说，政府必定依据 G_t 选择 T_t 以实现长期预算平衡；但在短期内，政府不能不致力于稳定税收，使之不因政府开支的随机波动而

受到过大的冲击. 因此,政府的决策目标是最小化税收的扭曲①. Barro 将税收的扭曲界定为

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t D(T_t) \quad (0<\beta<1),$$

其中 $D(\cdot)$ 是所谓扭曲函数(与效用函数对照!),它满足条件 $D'(\cdot)>0, D''(\cdot)>0$. 为具体起见,下面采用二次扭曲函数(对照 2.3 节式(7))

$$D(T)=T+(m/2)T^2 \quad (m>0). \tag{1}$$

于是,政府决策问题可表为

$$\begin{cases} \min\limits_{T_t} \mathrm{E}_0 \sum\limits_{t=0}^{\infty}\beta^t D(T_t), & \text{(2a)} \\ \text{s.t.} \quad B_{t+1}=R(B_t+G_t-T_t), B_0 \text{ 给定}, & \text{(2b)} \\ \quad\quad B_0=\mathrm{E}_0\sum\limits_{t=0}^{\infty}R^{-t}(T_t-G_t). & \text{(2c)} \end{cases}$$

其中条件(2b)与条件(2c)分别为政府的动态预算约束与跨时预算约束,二者显然分别对应于2.3 节中的方程(1b)与方程(1c);与2.3 节中一样,$R=1+r$,r 是债券利率. 为更好地与 2.3 节对照,下面假定 $\beta R=1$. 这就可将式(2b)写成

$$\beta B_{t+1}-B_t=G_t-T_t,$$

它表明按现值计算的新债券发行量恰好平衡预算缺口,因而使政府免除财政赤字.

鉴于问题(2)在形式上与 2.3 节中的问题(1)几乎完全相同,如果抛开问题所表达的经济内容,仅将它作为一个数学问题来看待,那么它与 2.3 节中的问题(1)就完全不必区别. 这就可以直接引用 2.3 节中的结论,而不必重新推导. 例如,我们可直接写出以下结论:跨时预算约束条件(2c)等价于横截性条件

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}_0(\beta^t B_t)=0. \tag{2c$'$}$$

对应于 2.3 节式(4),问题(2)的 Euler 方程为

$$D'(T_t)=\beta\mathrm{E}_t[RD'(T_{t+1})]. \tag{3}$$

在 $\beta R=1$,$D(\cdot)$ 依式(1)的条件下,由式(3)得出

$$\mathrm{E}_t T_{t+1}=T_t,$$

即税收 T_t 是一个鞅. 进而依 2.3 节式(9)有

$$T_t=(1-\beta)\Big(B_t+\sum_{j=0}^{\infty}\beta^j\mathrm{E}_t G_{t+j}\Big)\triangleq G_{pt}, \tag{4}$$

---

① 古典经济学派认为,经济运行应完全受市场力量支配,政府的任何介入都会或多或少干扰市场机制的正常发挥,因而造成市场的某种扭曲,使得市场交易并非完全依据供需平衡所决定的市场价格进行. 政府征税,亦无例外地将扭曲市场,这种扭曲自然随税收的增加而加重. 但如本节一样用一扭曲函数来描述扭曲,则显然是一种高度简化的处理.

其中 G_{pt} 称为持久性政府开支. 因此,式(4)表明最优税收取决于持久性政府开支,后者又取决于政府的当前债务及对未来政府开支的预期. 这就达到了与消费理论形式上完全一样的结论,因而我们毫不费力就得到了一个基于公式(4)的持久性政府开支理论.

两个初看起来似乎完全不同的经济决策问题,居然具有数学上完全相同的结论,这一事实具有重大意义,它表明动态宏观经济理论的某些方法具有令人惊异的一般性. 这似乎预示着形成某种一般理论的可能性.

B. 税收的表示

这一标题表明,下面的内容正是与 2.3.2 小节相对应的. 如同 2.3 节式(10)一样,设定 Wold 表示

$$G_t = \overline{G} + B(L)\varepsilon_t, \quad B(L) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j L^j, \tag{5}$$

其中 b_j 满足 $\sum b_j^2 < \infty$ 且 $b_0 = 1$. 式(5)表明 G_t 是一个平稳序列,对于一个成熟且稳定的经济体,这一假设是合理的.

因可直接移用 2.3.2 小节中的结果,下面只需列举主要的公式,并作一些简略的解释,而不必去重复实质上同样的论证.

(i) 用 B_t 与 $G_j(j \leqslant t)$ 表示 T_t. 依 2.3 节式(12),有

$$\begin{cases} T_t = (1-\beta)B_t + G(L)G_t + \beta B(\beta)\overline{G}/B(1), \\ G(L) = \dfrac{(1-\beta)[LB(L) - \beta B(\beta)]}{(L-\beta)B(L)}. \end{cases} \tag{6}$$

式(6)表明, T_t 取决于当前债务及以往政府开支;且 T_t 的表示依赖于序列 G_t 的结构,因而不存在一种由政府开支决定税收的普遍适用的公式. 若取 $\overline{G} = 0$,则

$$B(L) = (1 + aL)/(1 - L) \quad (|a| < 1),$$

即

$$G_t = G_{t-1} + \varepsilon_t + a\varepsilon_{t-1}, \tag{7}$$

则由 2.3 节式(13)有

$$T_t = (1-\beta)B_t + \frac{1 + a\beta + aL(1-\beta)}{1 + aL} G_t. \tag{8}$$

(ii) 用 $G_j(j \leqslant t)$ 表示 T_t. 由 2.3 节式(14)有

$$\begin{cases} T_t = G(L)(G_t - \overline{G}), \\ G(L) = \dfrac{(1-\beta)B(\beta)}{(1-L)B(L)}. \end{cases} \tag{9}$$

式(9)表明 T_t 完全取决于当前与过去的政府开支. 若序列 G_t 由式(7)给出,则依 2.3 节式(15b)有

$$T_t = \frac{1 + a\beta}{1 + aL} G_t = (1 + a\beta) \sum_{j=0}^{\infty} (-a)^j G_{t-j}. \tag{10}$$

形如 2.3 节式(16a)～式(16c)的公式，在此处亦有类似的推广，且可作出类似的直观解释. 例如，对应于 2.3 节式(16a)的类似税收公式表明，政府开支的短期冲击(如一次战争的冲击)对税收有长期影响.

(iii) 用测定政府开支表示 T_t. 仿照 2.3 节式(17)，定义

$$G_{mt} = (1-\beta)B_t + G_t, \tag{11}$$

则依 2.3 节式(19)有

$$T_t = \frac{(1-\beta)B(\beta)(L-\beta)}{(1-\beta)^2 B(\beta)L - \beta(1-L)^2 B(L)} G_{mt} \triangleq G(L)G_{mt}. \tag{12}$$

若 G_t 依式(7)，则依 2.3 节式(20)与式(21)有

$$T_t = \frac{1+a\beta}{1+a\beta L} G_{mt} = (1+a\beta)\sum_{j=0}^{\infty}(-a\beta)^j G_{m,t-j}; \tag{13}$$

$$\mathrm{E}_t G_{m,t+k} = T_t \quad (k>0). \tag{14}$$

2.4.2 营利性政府开支

Barro 模型在数学上的简单性以及因此而导致的结论的规则性，无疑是令人惊异的优点. 但从现实性的角度考虑，其完美性就大打折扣了. 要之，Barro 的假设过于理想化了，实际情况要复杂得多. 因此，对 Barro 模型必然可提出各种修正. 一个自然提出的修正是：政府开支 G_t 并不是一种纯支出，它可能给政府带来收益，因而需实质性地修正政府预算约束方程(2b).

A. 模型描述

营利性的政府开支是大量存在且被广泛认可的. 例如，政府可直接向实业界投资；政府在市场利率下向产业部门贷款；政府投资于公共教育部门，促使生产力提高，因而从税收的增长获得回报；等等. 所有上述政府开支都给政府带来收益，称这些开支为资本账户上的开支. 以 K_t 记政府拥有的资本存量，它给政府带来收入 rK_t. $I_t(=\Delta K_{t+1} = K_{t+1} - K_t)$ 就是政府在资本账户上的开支. 现在 G_t 则记政府的非营利性开支，于是政府预算约束方程(2b)应修正为

$$\begin{aligned} B_{t+1} &= R(B_t + G_t + I_t - T_t - rK_t) \\ &= R(B_t + G_t - T_t + K_{t+1} - RK_t). \end{aligned} \tag{2b$'$}$$

一个很值得注意的有趣事实是，条件(2b)′可改写成

$$B_{t+1} - RK_{t+1} = R(B_t - RK_t + G_t - T_t).$$

这就表明，只要令 $\widetilde{B}_t = B_t - RK_t$，就可将条件(2b)′写成

$$\widetilde{B}_{t+1} = R(\widetilde{B}_t + G_t - T_t),$$

而这在形式上已变得与条件(2b)完全一样了. 于是，营利性政府开支的决策问题可表为

$$\begin{cases} \min\limits_{T_t} \mathrm{E}_0 \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t D(T_t), & (15a) \\ \text{s.t.} \quad \widetilde{B}_{t+1} = R(\widetilde{B}_t + G_t - T_t), & (15b) \\ \qquad \lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{E}_0(R^{-t}\widetilde{B}_t) = 0. & (15c) \end{cases}$$

式(15a)中的扭曲函数 $D(\cdot)$ 仍取为式(1)的形式. 横截性条件(15c)相当于

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}_0[R^{-t}(B_t - RK_t)] = 0.$$

就经济含义而言，问题(15)与问题(2)显然有别；但就其数学形式而言，二者竟然完全相同！初看起来，这是颇令人惊异的. 注意，得出问题(15)只是用了一个小小的数学技巧，即以 $\widetilde{B}_t = B_t - RK_t$ 代替 B_t. 与 $\widetilde{B}_t$ 比较起来，

$$\widetilde{G}_t = G_t + I_t, \widetilde{T}_t = T_t + rK_t$$

似乎有更自然的经济意义；但无论用 $\widetilde{G}_t$ 或 $\widetilde{T}_t$ 都起不到 $\widetilde{B}_t$ 的作用，这是颇耐人寻味的.

B. 最优税收

一旦指明了问题(15)与问题(2)在形式上的一致性，余下的事情就是直接转译2.4.1小节中的结果，而别无实质性的工作可做了. 仍设 $\beta R = 1$. 今将主要结论列举如下.

(i) T_t 是一个鞅，依式(4)有

$$T_t = (1-\beta)\Big(\widetilde{B}_t + \sum_{j=0}^{\infty}\beta^j \mathrm{E}_t G_{t+j}\Big) = G_{pt} - rK_t, \tag{16}$$

其中 G_{pt} 依式(4). 式(16)表明，营利性政府开支的存在降低了税收 T_t.

以下设 G_t 由式(5)给定.

(ii) 式(6)现在应修改为

$$T_t + rK_t = \text{式(6)之右端}. \tag{17}$$

可见，营利性政府开支对式(4)与式(6)的影响是一样的.

(iii) 式(9)保持不变. 由此可得出一个初看起来似乎难以置信的结论：最优税收完全取决于当前与过去的非营利性政府开支，而与营利性政府开支无关！

(iv) 设 G_{mt} 依式(11)，$G(L)$ 依式(12)，则

$$T_t = G(L)(G_{mt} - rK_t). \tag{18}$$

若 G_t 依式(7)，则

$$\mathrm{E}_t(G_{m,t+k} - rK_{t+k}) = T_t \quad (k > 0). \tag{19}$$

这表明营利性政府开支的存在改变了式(12)～(14).

参考文献

[1]　Barro R J. On the determination of the public debt [J]. J. Political

Eco., 1979, 87: 940-971.
[2] 胡适耕,吴付科. 宏观经济的数理分析[M]. 北京:科学出版社,2004.
[3] Judd K. Debt and distortionary taxation in a simple perfect foresight model[J]. J. Monetary Eco., 1987, 20:51-72.
[4] Lucas R E. Econometric policy evaluation: a critigue[C]. In the Phillips Curve and the Labor Market, 1976.
[5] Lucas R E, stokey N L. Optimal fiscal and monetary policy in an economy without capital[J]. J. Monetary Eco., 1983, 12:55-93.
[6] Malliaris A G, Brock W A. Stochastic Methods in Economics and Finance[M]. Amsterdam: North Holland, 1982.
[7] Sargent T J. Macroeconomic Theory[M]. 2nd ed. Boston: Academic Press, 1987.
[8] Turnovsky S J. Methods of Macroeconomic Dynamics[M]. Cambridge: MIT Press, 1995.
[9] Turnovsky S J, Brock W A. Time consistency and optimal goverment policies in perfect foresight eguilibrium[J]. J. Publ. Eco., 1980, 13: 183-212.

2.5 投　资

投资者为实现其投资收益最大化,在一个随机环境中进行决策,因而必须用类似于消费模型的随机优化模型来描述. 作为决策者的投资者,可以是代表性厂商,亦可以是消费者. 这两种情况的适用模型颇不相同,本节将主要考虑厂商投资. 投资模型涉及的主要变量是:投资者的资产存量 k_t, 投资 I_t, 通常取 $I_t = \Delta k_t = k_t - k_{t-1}$, 亦可取 $I_t = \Delta k_{t+1}$, 这两种取法对于模型虽无本质影响,但必定导致稍有不同的公式;产品价格 p_t 与资本价格 r_t, 二者均非投资者所能控制,且通常具有随机波动,因而成为投资不确定性的根源. p_t,r_t 由市场决定,因而可取作模型的内生变量,对于一个小型开放经济体亦可取为外生的随机序列. 投资将为投资者带来收益(增加产出或纯资产收入),同时也要付出成本(购买成本及实现投资的调整成本,后者在资产转让时不能收回). 以上两方面的考虑是决定投资目标函数的基础. 投资模型要解答的问题是:投资者如何依赖已有的信息或对于未来经济环境的预期,最优地决定其投资量 I_t, 或等价地决定资产 k_t. 这一问题的解答依赖于我们已初步熟悉的随机最优化方法.

2.5.1 厂商投资决策

厂商投资决策无疑是投资理论的主要研究对象.厂商投资的特点是:投资的直接效果是获得产出,厂商从产出得到收益;厂商依赖于其生产所需的设施,而投资转化为厂商的固定资产明显地需要耗费调整成本,因而调整成本成为厂商投资决策的一个重要因素.

A. 模型描述

设经济中有 n(n 充分大)个同等的竞争性厂商,他们投入同样的要素(资本),生产同一产品.若从狭义上理解,可以认为所考虑的厂商属于同一行业;若从广义上理解,则将所说的"同一产品"理解为**复合产品**,因而其价格 p_t 表示价格水平.厂商的利润是

$$\pi_t = p_t y_t - r_t I_t - C(I_t), \quad I_t = k_t - k_{t-1}, \tag{1}$$

其中 $p_t y_t$ 是产出收益, $y_t = f(k_t)$ 是产出, $f(\cdot)$ 为生产函数,通常取 $f(k) = Ak$, $A(>0)$ 为生产力系数; $c_t \triangleq r_t I_t + C(I_t)$ 是投资成本,它由购买成本 $r_t I_t$ 与**调整成本** $C(I_t)$ 两部分组成,调整成本函数 $C(\cdot)$ 满足条件

$$C(0) = C'(0) = 0, \quad C''(\cdot) > 0. \tag{2}$$

通常取二次成本函数

$$C(I) = (c/2)I^2 \quad (c > 0). \tag{3}$$

调整成本是实现投资所必要的支出,如设备的安装与调试费等,这种支出在资产转移时不能收回.注意条件(2)推出 $C(I) > 0 (I \neq 0)$,可见即使在 $I < 0$ (这意味着撤除投资)时也要付出正的成本.当然,撤资与投资所付出的成本未必一定如函数(3)所表达的呈现对称性.

假定厂商对于市场不具有控制力,因而产品价格 p_t 与资本价格 r_t 对于厂商都是给定的.不过,价格 p_t 受到宏观约束,它取决于如下**需求方程**:

$$p_t = a - bY_t + u_t, \quad Y_t = ny_t, \tag{4}$$

其中 a,b 是正常数, u_t 是对于需求的外生冲击.

厂商的决策目标是:最优地选定投资 I_t,以使其期望折现利润最大化,这意味着解如下随机最大化问题:

$$\max \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \pi_t, \quad \pi_t \text{ 依式(1)}. \tag{5}$$

如同消费决策模型一样, β^t 是折现系数, $0 < \beta < 1$.

模型的随机因素源于随机序列 r_t 与 u_t,二者都是外生的,假定它们有如下 Wold 表示:

$$A(L)r_t = \varepsilon_t, \quad B(L)u_t = \eta_t, \tag{6}$$

其中 $A(z),B(z)$ 均在 $|z| \leqslant 1$ 上解析且无零点; ε_t 与 η_t 均为白噪声.下面主要考

虑如下特殊情况：

$$(1-\rho L)r_t=\varepsilon_t(|\rho|<1),\quad u_t=\eta_t. \tag{7}$$

B. 模型分析

从已有的经验中形成的分析方法可概括为如下标准步骤(参考2.3节～2.4节)：

(i) 从问题的一阶微分条件得出某个Euler方程，它通常是一个含期望的差分方程.

(ii) 从Euler方程解出选择变量，通常得到一个前向公式，它表明最优决策依赖于对某些变量未来值的预期.

(iii) 将前向公式转化为一个后向公式，这依赖于模型中外生变量的Wold表示. 最终结果显示出，最优决策取决于已知的历史资料.

现在对问题(5)逐个完成以上标准步骤.

首先，直接经微分得出如下一阶条件：

$$\begin{aligned}0&=\mathrm{E}_t\left(\frac{\partial\pi_t}{\partial k_t}+\beta\frac{\partial\pi_{t+1}}{\partial k_t}\right)\\&=\mathrm{E}_t[p_tf'(k_t)-r_t-C'(I_t)+\beta r_{t+1}+\beta C'(I_{t+1})],\end{aligned}$$

由此得到Euler方程

$$\mathrm{E}_t[(1-\beta L^{-1})(r_t+C'(I_t))]=p_tf'(k_t). \tag{8}$$

利用2.2节中的公式(34)，从方程(8)解出

$$r_t+C'(I_t)=\mathrm{E}_t[(1-\beta L^{-1})^{-1}p_tf'(k_t)]=\sum_{j=0}^{\infty}\beta^j\mathrm{E}_t[p_{t+j}f'(k_{t+j})],$$

故得如下**投资公式**：

$$I_t=C'^{-1}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\beta^j\mathrm{E}_t[p_{t+j}f'(k_{t+j})]-r_t\right). \tag{9}$$

式(9)表明**最优投资** I_t 取决于对未来产品价格及边际产出的预期，且与这种预期正相关. 直观上这当然是合理的.

式(9)的适用范围不依赖于函数 $C(\cdot)$ 与 $f(\cdot)$ 的具体形式，这是其优点. 但其中包含了应由方程(4)决定的 p_{t+j} 及由投资决定的 k_{t+j}，却不能令人满意. 现在利用方程(4)及特殊假设(3)与 $f(k)=Ak$ 得出式(9)的一个改进. 不过，这样一个改进并不能以方程(3)、方程(4)等直接代入式(9)得到，而要重解方程(8).

以方程(3)、方程(4)及 $f(k)=Ak$ 代入方程(8)得到①

$$\mathrm{E}_t[(1+\beta+A^2bnc^{-1}-L-\beta L^{-1})k_t]=c^{-1}\mathrm{E}_t(Aa+Au_t-r_t+\beta r_{t+1}),$$

① 很重要的一点是，不可以方程(4)代入目标函数重新求最优性条件；如果那样做，需求方程(4)对于个体就不再是给定的了.

或改写为(这是关键)

$$\mathrm{E}_t[(1-\lambda L^{-1})(1-\lambda_1 L)k_t] = [\lambda/(\beta c)]\mathrm{E}_t(Aa + Au_t - r_t + \beta r_{t+1}), \quad (10)$$

其中 λ,λ_1^{-1} 是特征方程

$$\lambda^2 - (1+\beta+A^2bnc^{-1})\lambda + \beta = 0$$

的解,它们满足

$$\begin{cases} \lambda + 1/\lambda_1 = 1+\beta+A^2bnc^{-1}, \quad \lambda/\lambda_1 = \beta; \\ 0<\lambda<\beta<1<1/\lambda_1. \end{cases} \quad (11)$$

利用明显的公式 $I_t = (1-\lambda_1^{-1})k_t + \lambda_1^{-1}(1-\lambda_1 L)k_t$ 从方程(10)解出

$$\begin{aligned} I_t &= \left(1-\frac{\beta}{\lambda}\right)k_t + \frac{1}{c}\mathrm{E}_t\left[\frac{1}{1-\lambda L^{-1}}(Aa+Au_t - r_t + \beta r_{t+1})\right] \\ &= \left(1-\frac{\beta}{\lambda}\right)k_t + \frac{Aa}{c(1-\lambda)} + \frac{A}{c}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\mathrm{E}_t u_{t+j} \\ &\quad - \frac{\beta r_t}{c\lambda} + \frac{1}{c}\left(\frac{\beta}{\lambda}-1\right)\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\mathrm{E}_t r_{t+j}. \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)表明,I_t 取决于对未来资本价格与需求冲击的预期.式(12)仅含 k_t 与外生变量 r_j,u_j 的预期值.

式(12)关于 $k_t,\mathrm{E}_t u_{t+j},\mathrm{E}_t r_{t+j}$ 是线性的且不含资本 k_t 的未来值,当然远胜过式(9).而能得出较优越的式(12),是因为我们导出了一个关于 k_t 的二阶线性随机差分方程,对这样的方程可应用2.2节中的求解公式(34).为今后的应用着想,此处得总结一下,是哪些设定使我们得以做到这一点.首先注意问题(5)的约束条件(4)是线性的,用了成本函数(3)之后使得目标函数(1)是二次函数;进而以条件(4)及 $y_t = Ak_t$ 代入函数(1)之后函数(1)仍为二次函数,这就使得Euler方程(依式(8))是一个形如2.2节式(32)的线性随机差分方程.总之,要点在于有一个二次目标函数.可回想到在2.3节中就是如此.这就不足为怪了,本章处理的各种随机最优决策模型都倾向于采用二次目标函数.

不过,式(12)是一个前向公式仍不能使人满意,现在利用式(6)将式(12)改造成一个后向公式.首先,利用 $A(L)r_t = \varepsilon_t$ 并参照2.3节式(11)得出

$$\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\mathrm{E}_t r_{t+j} = \frac{LA(L)^{-1} - \lambda A(\lambda)^{-1}}{(L-\lambda)A(L)^{-1}}r_t = \frac{LA(\lambda)-\lambda A(L)}{(L-\lambda)A(\lambda)}r_t;$$

类似地有

$$\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\mathrm{E}_t u_{t+j} = \frac{LB(\lambda)-\lambda B(L)}{(L-\lambda)B(\lambda)}u_t.$$

将以上两式代入式(12)得

$$cI_t = c\left(1-\frac{\beta}{\lambda}\right)k_t + \frac{A(L)(\lambda-\beta)+A(\lambda)(\beta-L)}{(L-\lambda)A(\lambda)}r_t$$

$$+\frac{ALB(\lambda)-A\lambda B(L)}{(L-\lambda)B(\lambda)}u_t+\frac{Aa}{1-\lambda}. \tag{13}$$

式(13)已转化为后向公式，它表明最优投资取决于当前资本及以往的资本价格与需求冲击. 利用式(13)同时也确定了资本序列 k_t，然后依式(4)确定价格序列 p_t. 这样得到的 k_t, p_t 一起构成投资问题的**理性预期竞争均衡**.

为得到更直观的结果，需利用更特殊的假定(7). 以 $A(L)=1-\rho L, B(L)=1$ 代入式(13)得

$$cI_t=c\left(1-\frac{\beta}{\lambda}\right)k_t-\frac{1-\beta\rho}{1-\lambda\rho}r_t+Au_t+\frac{Aa}{1-\lambda}. \tag{14}$$

式(14)已经是一个可直接用于计算的简单公式，其右端仅含所涉及变量的当前值，这意味着厂商仅由当前观测到的资料即可决定其最优投资. 这当然是应用式(7)这一极特殊假设的结果，而并非普遍规律.

因 k_t 并非独立于 I_t，式(14)右端含有 k_t 仍不能令人满意. 不过，依方程(4)有 $k_t=(a+u_t-p_t)/(Abn)$，以此代入式(14)即可消去 k_t，得到

$$cI_t=\frac{Ap_t}{1-\lambda}-\frac{1-\beta\rho}{1-\lambda\rho}r_t-\frac{A\lambda u_t}{1-\lambda}, \tag{15}$$

得出式(15)时用了式(11). 式(15)表达了投资 I_t 与价格 p_t, r_t 之间的关系，而 I_t 决定了供给，因此称式(15)为**动态供应曲线**. 式(15)表明，I_t 与 p_t 正相关，而与 r_t, u_t 负相关. 直观上，提高产品价格或降低资本价格都会刺激投资，因此 I_t 与 p_t 正相关，与 r_t 负相关是可以理解的. 另一方面，从方程(4)看来，较大的 u_t 对应较高的 p_t；u_t 对 I_t 的影响似乎并不明显.

C. 一个变形

现在将利润函数(1)修改为

$$\pi_t=y_t-\frac{1}{2}(ay_t-k_t)^2-\frac{c}{2}I_{t+1}^2, \tag{1$'$}$$

其中产出 y_t 为给定的随机序列，

$$c_t\triangleq\frac{1}{2}(ay_t-k_t)^2+\frac{c}{2}I_{t+1}^2$$

是投资成本. 注意 y_t 不受厂商投资决策的影响，可以设想 y_t 完全取决于市场需求，例如某些情况下石油或电力的产出就是如此. 现在投资的目的不是扩大产出，而是维持不能独立选择的产出，同时通过降低成本来实现利润最大化. 投资额度越大，或者资本存量 k_t 与标准需求量 ay_t 的差距过大(无论 k_t 过多或过少)，都会使利润越小. 因式(1)$'$中不存在 y_t 以外的外生变量，故决策者只要确定最优投资对于序列 y_t 的依赖关系，这可表为某个前向或后向公式. 形式上，厂商决策问题仍可表为式(5).

首先导出一阶条件：

$$0 = \mathrm{E}_t\left(\frac{\partial \pi_t}{\partial k_{t+1}} + \beta \frac{\partial \pi_{t+1}}{\partial k_{t+1}}\right) = \mathrm{E}_t[-cI_{t+1} + \beta(ay_{t+1} - k_{t+1} + cI_{t+2})],$$

经整理后得

$$\mathrm{E}_t[(1-\lambda L^{-1})(1-\lambda_1 L^{-1})k_t] = -a\beta c^{-1}\mathrm{E}_t y_{t+1}, \tag{16}$$

其中 λ, λ_1 满足 $\lambda + \lambda_1 = 1 + \beta + \beta c^{-1}, \lambda\lambda_1 = \beta, 0 < \lambda < \beta < 1 < \lambda_1$. 式(16)就是修正后的问题(5)的 Euler 方程.

类似于式(12)的推导,从方程(16)解出

$$\begin{aligned} I_{t+1} &= (\lambda_1^{-1} - 1)k_t - \lambda_1^{-1}(1-\lambda_1 L^{-1})k_t \\ &= (\lambda_1^{-1} - 1)k_t + \lambda_1^{-1}a\beta c^{-1}\mathrm{E}_t[(1-\lambda L^{-1})^{-1}y_{t+1}] \\ &= \left(\frac{\lambda}{\beta} - 1\right)k_t + \frac{a}{c}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^j \mathrm{E}_t y_{t+j}, \end{aligned} \tag{17}$$

这就得出用 y_t 表出投资的前向公式.

为将式(17)转化为某个后向公式,需设定一个 Wold 表示,例如设 y_t 表为 2.3节式(10),则依 2.3 节式(11)有

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^j \mathrm{E}_t y_{t+j} = \frac{\lambda B(\lambda)\bar{y}}{(1-\lambda)B(1)} + \frac{LB(L) - \lambda B(\lambda)}{(L-\lambda)B(L)}y_t - y_t,$$

代入式(17)得

$$I_{t+1} = \left(\frac{\lambda}{\beta} - 1\right)k_t + \frac{a\lambda[B(L) - B(\lambda)]}{c(L-\lambda)B(L)}y_t + \frac{a\lambda B(\lambda)\bar{y}}{c(1-\lambda)B(1)}. \tag{18}$$

为得到较直观的结果,进而假定

$$y_t = \rho y_{t-1} + (1-\rho)\bar{y} + \varepsilon_t \quad (|\rho| \leqslant 1), \tag{19}$$

这相当于取 $B(L) = (1-\rho L)^{-1}$. 以此代入式(18)整理后得

$$I_{t+1} = \left(\frac{\lambda}{\beta} - 1\right)k_t + \frac{a\lambda\rho}{c(1-\lambda\rho)}y_t + \frac{a\lambda(1-\rho)\bar{y}}{c(1-\lambda)(1-\lambda\rho)}. \tag{20}$$

式(20)表明,投资 I_{t+1} 与 k_t 负相关,与 y_t 正相关. 直观上看,这一结果是合理的.

2.5.2 考虑外部性的厂商投资

现在对 2.5.1 小节中的模型作如下修正:假定厂商的产出不仅依赖于其资本投入,而且还依赖于行业规模,这意味着厂商所处的市场环境具有正外部性. 在外部性存在的情况下,2.5.1 小节中的分析方法与结论都将有所变化.

A. 模型描述

形式上,厂商决策问题依然表为式(5),但其中的利润函数修改为

$$\pi_t = p_t y_t - w_t k_t - (c/2)I_t^2, \tag{21}$$

其中 w_t 表示资本的一期租金,它与式(1)中的资本价格 r_t 的关系可表为

$$w_t = \mathrm{E}_t[(1-\beta L^{-1})r_t] \quad 或 \quad r_t = \sum_{j=0}^{\infty}\beta^j \mathrm{E}_t w_{t+j}. \tag{22}$$

其次，式(21)中的产出 y_t 由2.5.1小节中的 $y_t = Ak_t$ 修改为

$$y_t = Ak_t + BK_t, \quad K_t = nk_t \quad (A > 0, B > 0). \tag{23}$$

式(23)表明产出 y_t 与行业总资本 K_t 正相关；外部性正体现于此. 产品价格依然取决于需求方程(4)，只是现在方程(4)中的 Y_t 应依据式(23)加以修正，因而现在方程(4)具有形式

$$p_t = a - b(A + nB)K_t + u_t. \tag{24}$$

个体在作投资决策时，将 K_t 看作给定的. 但一旦个体选定了 k_t，K_t 亦必随之确定. 因此，问题的解可以总体变量的形式表出.

B. 模型分析

如同在2.5.1B中所作的那样，下面的分析自然地分为三个步骤：求Euler方程；求表示投资的前向公式；将前向公式转化为后向公式.

首先，问题的一阶条件为

$$0 = \mathrm{E}_t\left(\frac{\partial \pi_t}{\partial k_t} + \beta \frac{\partial \pi_{t+1}}{\partial k_t}\right) = \mathrm{E}_t(Ap_t - w_t - cI_t + \beta cI_{t+1}),$$

注意其中用到 $\partial y_t / \partial k_t = A$，而不是 $\partial y_t / \partial k_t = A + nB$（何故？注意这是要点！）. 以式(24)代入以上一阶条件消去 p_t，经整理后得

$$\beta c\mathrm{E}_t[(1 - \lambda L^{-1})(1 - \lambda_1 L)K_t] = n\lambda \mathrm{E}_t(Aa + Au_t - w_t), \tag{25}$$

其中 λ, λ_1 满足(对照式(11))

$$\begin{cases} \lambda + 1/\lambda_1 = 1 + \beta + Abc^{-1}n(A + nB), \quad \lambda/\lambda_1 = \beta; \\ 0 < \lambda < \beta < 1 < 1/\lambda_1. \end{cases} \tag{26}$$

式(25)作为问题的Euler方程，可与方程(10)相对照.

$J_t \triangleq \Delta K_t = nI_t$ 表示社会总投资. 如同式(12)的推导一样，可从方程(25)解出 J_t 并表为一个前向公式：

$$\begin{aligned} J_t &= (1 - \lambda_1^{-1})K_t + \lambda_1^{-1}(1 - \lambda_1 L)K_t \\ &= (1 - \lambda_1^{-1})K_t + nc^{-1}\mathrm{E}_t[(1 - \lambda L^{-1})^{-1}(Aa + Au_t - w_t)] \\ &= \left(1 - \frac{\beta}{\lambda}\right)K_t + \frac{n}{c}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j \mathrm{E}_t(Au_{t+j} - w_{t+j}) + \frac{Aan}{c(1 - \lambda)}. \end{aligned} \tag{27}$$

为将式(27)转化为一个后向公式，作如下设定：

$$A(L)w_t = \varepsilon_t, \quad B(L)u_t = \eta_t, \tag{28}$$

其中 $A(L), B(L), \varepsilon_t$ 与 η_t 仍如式(6). 与式(6)相比，此处只是以 w_t 取代了 r_t. 因此，不妨直接借用2.5.1B中的公式得出 $\sum \lambda^j \mathrm{E}_t u_{t+j}$ 与 $\sum \lambda^j \mathrm{E}_t w_{t+j}$ 的表达式，然后代入式(27)得出

$$\begin{aligned} \frac{c}{n}J_t = \frac{c}{n}\left(1 - \frac{\beta}{\lambda}\right)K_t - \frac{LA(\lambda) - \lambda A(L)}{(L - \lambda)A(\lambda)}w_t \\ + \frac{ALB(\lambda) - A\lambda B(L)}{(L - \lambda)B(\lambda)}u_t + \frac{Aa}{1 - \lambda}. \end{aligned} \tag{29}$$

式(29)正好与式(13)相当.

若取 $A(L)=1-\rho L(|\rho|\leqslant 1)$, $B(L)=1$，则式(29)简化为

$$\frac{c}{n}J_t=\frac{c}{n}\left(1-\frac{\beta}{\lambda}\right)K_t-\frac{w_t}{1-\lambda\rho}+Au_t+\frac{Aa}{1-\lambda}$$

$$=\frac{Ap_t}{1-\lambda}-\frac{w_t}{1-\lambda\rho}-\frac{A\lambda u_t}{1-\lambda}. \quad \text{（用式(24)、(26)）} \tag{30}$$

注意上式右端的首、尾两项与式(15)右端的首、尾两项完全一致；而式(15)与式(30)的左端均为 cI_t. 公式(30)表明，J_t 与 p_t 正相关，与 w_t 及 u_t 负相关. 这些结论与2.5.1B中的结果是类似的.

C. 社会计划者问题

现在以社会计划者代替厂商作为决策者，而其他设定均保持不变，考虑社会最优投资 $J_t=\Delta K_t$ 会有什么变化. 首先，代替由式(21)表示的厂商利润 π_t，应采用社会总利润

$$\Pi_t=p_tY_t-w_tK_t-(c/2n)J_t^2, \tag{31}$$

其中 $Y_t=(A+nB)K_t$. 相应地，一阶条件改变为

$$0=\mathrm{E}_t\left(\frac{\partial\Pi_t}{\partial K_t}+\beta\frac{\partial\Pi_{t+1}}{\partial K_t}\right)=\mathrm{E}_t\left[p_t(A+nB)-w_t-\frac{c}{n}J_t+\frac{\beta c}{n}J_{t+1}\right].$$

以式(24)代入上式消去 p_t，经整理后得一新的Euler方程：

$$\mathrm{E}_t[(1-\lambda L^{-1})(1-\lambda_1 L)K_t]=\frac{n\lambda}{\beta c}[(A+nB)(a+u_t)-w_t], \tag{32}$$

其中 λ,λ_1 满足

$$\begin{cases}\lambda+1/\lambda_1=1+\beta+bc^{-1}n(A+nB)^2, & \lambda/\lambda_1=\beta;\\ 0<\lambda<\beta<1<1/\lambda_1.\end{cases} \tag{33}$$

对照式(32)、式(33)与式(25)、式(26)看出，改变是轻微的，但是它是不可忽略的.

若不考虑 λ,λ_1 的变化，则式(32)与式(25)比较后唯一的改变是以 $\widetilde{A}\triangleq A+nB$ 取代了 A. 因此，只要以 $\widetilde{A}$ 替换 A，就可以直接移用由方程(25)推出的所有结果，包括式(27)、式(29)与式(30)，而不必重新推导. 这样，直接从式(27)得到

$$J_t=\left(1-\frac{\beta}{\lambda}\right)K_t+\frac{n}{c}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\mathrm{E}_t[(A+nB)u_{t+j}-w_{t+j}]+\frac{an(A+nB)}{c(1-\lambda)}. \tag{34}$$

其次，若 $(1-\rho L)w_t=\varepsilon_t(|\rho|<1)$，则由式(30)得出

$$\frac{c}{n}J_t=\frac{p_t(A+nB)}{1-\lambda}-\frac{w_t}{1-\lambda p}-\frac{\lambda u_t(A+nB)}{1-\lambda}. \tag{35}$$

由式(35)同样得到，J_t 与 p_t 正相关，与 w_t 及 u_t 负相关，这与分散化的厂商决策无异. 由于以 $A+nB$ 取代了 A，从式(35)看来，与厂商决策比较，p_t,u_t 对 J_t 的

影响似乎加强了.但若考虑到由式(33)决定的λ也发生了变化,则还不能简单地下结论,严格的讨论稍复杂些.首先从式(26)解出

$$\lambda = \frac{1}{2}(q - \sqrt{q^2 - 4\beta}), \quad q = 1 + \beta + \frac{A\widetilde{A}bn}{c},$$

则

$$\frac{\partial \lambda}{\partial A} = \frac{\widetilde{A}bn}{c}\left(1 - \frac{q}{\sqrt{q^2 - 4\beta}}\right) < 0.$$

注意到当n充分大时q亦充分大,一个初等的计算不难验证

$$\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{A}{1-\lambda}\right) = \frac{1 - \lambda + A\partial\lambda/\partial A}{(1-\lambda)^2} > 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{A\lambda}{1-\lambda}\right) = \frac{\lambda(1-\lambda) + A\partial\lambda/\partial A}{(1-\lambda)^2} > 0.$$

由此可见,当以$\widetilde{A} = A + nB$替代A时,p_t与u_t对J_t的影响确实增大;而w_t对J_t的影响则下降.

2.5.3 投资与税收

对于资本征税,是政府的重要政策手段之一,它常用来达到多种不同的目的,例如实现财政或产业上的某些意图.政府的参与使得投资决策问题显著地复杂化了:现在有两个决策者,即厂商与政府,因此,模型由两阶段决策构成.

A. 模型描述

设政府以税率τ_t对资本征税,这使厂商的利润函数(1)应修改为

$$\pi_t = p_t y_t - r_t I_t - C(I_t) - \tau_t k_t. \tag{36}$$

仍假定$y = Ak, C(I) = (c/2)I^2, p_t$取决于方程(4).式(36)与方程(4)可分别改写成

$$\pi_t = \widetilde{p}_t y_t - r_t I_t - (c/2)I_t^2,$$

$$\widetilde{p}_t \triangleq p_t - A^{-1}\tau_t = a - bY_t + \widetilde{u}_t, \quad \widetilde{u}_t = u_t - A^{-1}\tau_t.$$

这就可用2.5.1B中的现成结果得出

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_t[(1 - \lambda L^{-1})(1 - \lambda_1 L)k_t] &= [\lambda/(\beta c)]\mathrm{E}_t(Aa + A\widetilde{u}_t - r_t + \beta r_{t+1}) \\ &\triangleq [\lambda/(\beta c)]\mathrm{E}_t(s_t - \tau_t), \end{aligned} \tag{37}$$

其中λ, λ_1满足式(11),而

$$s_t = A(a + u_t) - r_t + \beta r_{t+1}. \tag{38}$$

从方程(37)解出

$$\begin{aligned} K_t - \lambda_1 K_{t-1} &= [n\lambda/(\beta c)]\mathrm{E}_t[(1 - \lambda L^{-1})^{-1}(s_t - \tau_t)] \\ &= \frac{n\lambda}{\beta c}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j \mathrm{E}_t(s_{t+j} - \tau_{t+j}) \triangleq \Phi_t \quad (t \geqslant 1). \end{aligned} \tag{39}$$

如在2.4节中已提到的，政府决策目标的选定是一个较复杂的问题，它既取决于政府的关注重点，也依赖于研究者观察的角度. 就此处的投资决策问题而言，我们假设政府追求“社会利润”的最大化，社会利润 (Π_t) = 社会福利 (W_t) −社会投资成本(C_t). 参照式(31)，令 $C_t = r_tJ_t + [c/(2n)]J_t^2$. 另一方面，依据福利经济学中的结论，$W_t$ 可由需求方程(4)依以下方式算出

$$W_t = \int_0^{Y_t}(a - bx + u_t)\mathrm{d}x = aY_t - (b/2)Y_t^2 + u_tY_t$$
$$= AK_t(a + u_t) - (b/2)A^2K_t^2.$$

于是

$$\Pi_t = AK_t(a + u_t) - \frac{b}{2}A^2K_t^2 - r_tJ_t - \frac{c}{2n}J_t^2. \tag{40}$$

现在，可将政府决策问题表述为

$$\begin{cases} \max \mathrm{E}_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\Pi_t, \quad \Pi_t \text{ 依式(40)}; & (41a) \\ \text{s.t.} \quad K_t = \lambda_1K_{t-1} + \Phi_t, \quad \Phi_t \text{ 依式(39)}, & (41b) \\ \qquad \beta B_{t+1} = B_t + G_t - \tau_tK_t, \quad B_0 = 0, & (41c) \\ \qquad \lim_{t\to\infty}\mathrm{E}_0(\beta^tB_t) = 0. & (41d) \end{cases}$$

在问题(41)中，τ_t 是控制变量，K_t, B_t 是状态变量，s_t, G_t 是外生的. 若令 $T_t = \tau_tK_t$，则条件(41c)正好与2.4节条件(2b)相当.

B. 模型分析

问题(41)的随机性源于外生的随机序列 G_t, r_t, u_t. 为得出问题的某种显式解，假定 G_t, r_t, u_t (从而 s_t)都是确定性的，因而问题(41)成为一个确定性的动态最优决策问题. 下面用 Lagrange 乘子法来导出问题(41)的一阶条件. 作 Lagrange 函数

$$L = \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t[\pi_t + \theta_t(K_t - \lambda_1K_{t-1} - \Phi_t) + \mu_t(\beta B_{t+1} - B_t - G_t + \tau_tK_t)],$$

其中 θ_t, μ_t 是Lagrange 乘子. 问题(41)的一阶条件就是

$$\frac{\partial L}{\partial K_t} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \tau_t} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial B_t} = 0.$$

首先从最简单的

$$0 = \frac{\partial L}{\partial B_t} = \beta^t\mu_{t-1} - \beta^t\mu_t \quad (t \geqslant 1)$$

得出 $\mu_t = \mu_{t-1}$，因而 $\mu_t \equiv \mu$. 其次，由

$$0 = \frac{\partial L}{\partial K_t} = \beta^t\left(\frac{\partial\pi_t}{\partial K_t} + \theta_t + \mu\tau_t\right) + \beta^{t+1}\left(\frac{\partial\pi_{t+1}}{\partial K_t} - \lambda_1\theta_{t+1}\right)$$
$$= \beta^t\left[A(a+u_t) - A^2bK_t - r_t - \frac{c}{n}J_t + (1-\lambda L^{-1})\theta_t + \mu\tau_t + \beta\, r_{t+1} + \frac{\beta\, c}{n}J_{t+1}\right]$$

$$=\beta^t\left[s_t+\mu\tau_t+(1-\lambda L^{-1})\theta_t-\frac{\beta c}{n\lambda}(1-\lambda L^{-1})(1-\lambda_1 L)K_t\right]$$

得

$$(1-\lambda L^{-1})(1-\lambda_1 L)K_t=\frac{n\lambda}{\beta c}[s_t+\mu\tau_t+(1-\lambda L^{-1})\theta_t], \tag{42}$$

这与方程(37)比较得

$$\tau_t=-(1+\mu)^{-1}(1-\lambda L^{-1})\theta_t. \tag{43}$$

然后考虑

$$0=\frac{\partial L}{\partial \tau_t}=\beta^t\mu K_t-\sum_{j=0}^{\infty}\beta^j\theta_j\frac{\partial \Phi_j}{\partial \tau_t}=\beta^t\mu K_t+\sum_{j=0}^{t}\beta^j\theta_j\frac{n\lambda}{\beta c}\lambda^{t-j}$$

$$=\beta^t\left[\mu K_t+\frac{n\lambda}{\beta c}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_1 L)^j\theta_t\right]=\beta^t\left[\mu K_t+\frac{n\lambda}{\beta c}(1-\lambda_1 L)^{-1}\theta_t\right],$$

以上假定了当 $j<0$ 时 $\theta_j=0$. 这就得到

$$(1-\lambda_1 L)K_t=-[n\lambda/(\beta c\mu)]\theta_t \quad (t\geqslant 1). \tag{44}$$

这与式(42)比较得出

$$s_t+\mu\tau_t=-\mu^{-1}(1+\mu)(1-\lambda L^{-1})\theta_t. \tag{45}$$

联立方程(43)~方程(45)解出

$$\tau_t=\frac{\mu}{1+2\mu}s_t, \tag{46a}$$

$$\theta_t=-\frac{\mu(1+\mu)}{1+2\mu}\frac{1}{1-\lambda L^{-1}}s_t \quad (t\geqslant 1), \tag{46b}$$

$$K_t=\frac{n\lambda(1+\mu)}{\beta c(1+2\mu)}\frac{1}{(1-\lambda L^{-1})(1-\lambda_1 L)}s_t. \tag{46c}$$

2.5.4 库存投资

在现代生产中,厂商经常要为减少库存而拼命搏斗.但库存并非总是噩梦.实际上,适度的库存为任何行业顺利进行生产与销售所必需.库存包括半成品与最终产品,它占有产出的份额不过百分之几,但对经济的影响不可低估,因而是厂商决策的一个重要问题.必需的库存实质上是一种投资,即所谓库存投资,因而在投资理论的框架内考虑是很自然的.当然,库存投资有其明显的特殊性,因此所用的模型与本节前面的模型有很大不同.

A. 模型描述

模型涉及三个基本变量:产出 y_t, 销售量 s_t 与库存量 q_t. y_t 是厂商的选择变量,假定每期产出只能用于下期销售或转入库存. s_t 取决于市场,是一个外生变量,它的不确定性导致产出与库存的不确定性. q_t 记厂商在 t 期末的累积库存量,它不是独立的,而取决于前期产出与当期销售.若 $I_t=\Delta q_t$ 记新增库存量(可

看作库存投资)，则

$$I_t = y_{t-1} - s_t \quad 或 \quad y_t = I_{t+1} + s_{t+1}.$$

关键的问题是确定厂商的决策目标. 直观上，厂商应如此选择产出 y_t，使之足以供应销售且补充必要的库存，无论过多或过少都会造成损失. 因此，计划产出应尽可能接近于某个目标产出，使得背离目标的产出而造成的库存成本最小化. 于是问题归于适当选定成本函数，这种选择不免有人为性质. 下面取一个二次成本函数：

$$C_t = (a/2)(y_t - y_t^*)^2 + (b/2)(y_t + q_t - q_t^*)^2, \tag{47}$$

其中 a,b 是正常数，y_t^* 与 q_t^* 分别为目标产出与目标库存量，它们取决于市场环境与行业的技术水平，因而是外生的；偏离这些目标值，都会明显提高成本. 因产出 y_t 受到约束 $y_t = I_{t+1} + s_{t+1}$，厂商也不能径取 $y_t = y_t^*$，$y_t + q_t = q_t^*$ 而使 $c_t = 0$. 现在，可将厂商决策问题表述为

$$\begin{cases} \min\limits_{y_t} \mathrm{E}_0 \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t C_t, \quad C_t \text{ 依式(47)}, & (48a) \\ \text{s.t.} \quad q_{t+1} = q_t + y_t - s_{t+1}. & (48b) \end{cases}$$

在问题(48)中，y_t 与 q_t 分别为控制变量与状态变量，而方程(48b)是状态方程. 设定

$$q_t^* = \mathrm{E}_t s_{t+1} + \mu, \tag{49}$$

其中 μ 是某个固定的保留库存量. 直观上，式(49)是合理的. 以式(48b)与式(49)代入式(47)消去 y_t 与 q_t^* 得出

$$C_t = (a/2)(I_{t+1} + s_{t+1} - y_t^*)^2 + (b/2)(q_{t+1} + s_{t+1} - \mathrm{E}_t s_{t+1} - \mu)^2. \tag{47'}$$

注意除外生的 y_t^* 与 s_{t+1} 以外，C_t 仅含状态变量.

B. 模型分析

首先用熟知的标准方法导出一阶条件：

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{E}_t\left(\frac{\partial C_t}{\partial q_{t+1}} + \beta \frac{\partial C_{t+1}}{\partial q_{t+1}}\right) \\ &= \mathrm{E}_t[a(I_{t+1} + s_{t+1} - y_t^*) + b(q_{t+1} + s_{t+1} - \mathrm{E}_t s_{t+1} - \mu) \\ &\quad - a\beta(I_{t+2} + s_{t+2} - y_{t+1}^*)] \\ &= \mathrm{E}_t\{[-a + (a + b + a\beta)L^{-1} - a\beta L^{-2}]q_t\} \\ &\quad + \mathrm{E}_t[a(1 - \beta L^{-1})(s_{t+1} - y_t^*) - b\mu], \end{aligned}$$

这就得出 Euler 方程：

$$\mathrm{E}_t[(1-\lambda L^{-1})(1-\lambda_1 L^{-1})q_t] = \mathrm{E}_t[(1-\beta L^{-1})(s_{t+1} - y_t^*) - a^{-1}b\mu], \tag{50}$$

其中 λ,λ_1 满足条件：

$$\begin{cases}\lambda+\lambda_1=1+\beta+b/a, & \lambda\lambda_1=\beta;\\ 0<\lambda<\beta<1<\lambda_1.\end{cases} \tag{51}$$

现在从方程(50)求出 y_t 的一个前向公式：

$$\begin{aligned}
y_t &= \mathrm{E}_t(q_{t+1}-q_t+s_{t+1}) \qquad \text{(用式(48b))}\\
&= \mathrm{E}_t[(\lambda_1^{-1}-1)q_t+s_{t+1}-\lambda_1^{-1}(1-\lambda_1L^{-1})q_t]\\
&= \left(\frac{\lambda}{\beta}-1\right)q_t+\mathrm{E}_ts_{t+1}-\frac{\lambda}{\beta}\mathrm{E}_t\left\{\frac{1}{1-\lambda L^{-1}}\left[(1-\beta L^{-1})(s_{t+1}-y_t^*)-\frac{b\mu}{a}\right]\right\}\\
&= \left(\frac{\lambda}{\beta}-1\right)q_t+y_t^*+\left(1-\frac{\lambda}{\beta}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\mathrm{E}_t(s_{t+j+1}-y_{t+j}^*)+\frac{b\lambda\mu}{a\beta(1-\lambda)}.
\end{aligned} \tag{52}$$

这表明，最优产出 y_t 取决于现有库存、当前目标产出及对未来销售与目标产出的预期.

为将式(52)转化为一个后向公式，假定

$$A(L)s_t=\varepsilon_t,\quad B(L)y_t^*=\eta_t, \tag{53}$$

其中 $A(L)$，$B(L)$，ε_t 与 η_t 如同式(6)，则

$$\begin{aligned}
y_t &= \left(1-\frac{\lambda}{\beta}\right)\left(-q_t+\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\mathrm{E}_ts_{t+j}-\frac{s_t}{\lambda}-\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\mathrm{E}_ty_{t+j}^*\right)\\
&\quad +y_t^*+\frac{b\lambda\mu}{a\beta(1-\lambda)}\\
&= \left(1-\frac{\lambda}{\beta}\right)\left[\frac{LA(\lambda)-\lambda A(L)}{(L-\lambda)\lambda A(\lambda)}s_t-\frac{LB(\lambda)-\lambda B(L)}{(L-\lambda)B(\lambda)}y_t^*-\frac{s_t}{\lambda}-q_t\right]\\
&\quad +y_t^*+\frac{b\lambda\mu}{a\beta(1-\lambda)}.
\end{aligned} \tag{54}$$

这表明 y_t 取决于当前及过去的销售与目标产出.

为得到更直观的结果，考虑两种特殊情况.

(i) 取 $A(L)=1-\rho L(|\rho|<1)$，$B(L)=1$，这意味着

$$s_t=\rho s_{t-1}+\varepsilon_t,\quad y_t^*=\eta_t,$$

则式(54)简化为

$$y_t=\left(1-\frac{\lambda}{\beta}\right)\left(\frac{\rho s_t}{1-\lambda\rho}-q_t\right)+\frac{\lambda y_t^*}{\beta}+\frac{b\lambda\mu}{a\beta(1-\lambda)}. \tag{55}$$

这表明 y_t 与 y_t^*，s_t，ρ 正相关，与 q_t 负相关. 这是自然的.

(ii) 取 $A(L)=1$，$B(L)=1-\rho L(|\rho|<1)$，则

$$y_t=\frac{\lambda(1-\beta\rho)}{\beta(1-\lambda\rho)}y_t^*-\left(1-\frac{\lambda}{\beta}\right)q_t+\frac{b\lambda\mu}{a\beta(1-\lambda)}. \tag{56}$$

这表明 y_t 与 y_t^* 正相关，与 ρ，q_t 负相关；ρ 愈小(这意味着生产力冲击消失得愈快)，则 y_t 愈依赖于 y_t^*.

C. 一个变形

今对问题(48)作如下修正：由式(47)表示的成本函数修改为

$$C_t = (a/2)(y_t - y_t^*)^2 + (b/2)(c_t - c_t^*)^2 + (c/2)q_{t+1}^2, \tag{57}$$

其中 a,b,c 是正常数；c_t 是消费；c_t^* 是 c_t 的目标值，它是由市场决定的某个外生变量. 因此，y_t、c_t 对 y_t^*、c_t^* 的偏离及库存都要付出成本. 代替式(48b)，假定

$$q_{t+1} = q_t + y_t - c_t. \tag{58}$$

这意味着厂商将扣除消费之外的产出全部转入下期库存，因而厂商是一个完全自给的生产者，完全不考虑销售. 如果将某个封闭经济体的社会计划者看作一个厂商，那么式(58)正是一个适当的动态预算约束方程.

将式(58)代入式(57)消去 c_t，得到

$$C_t = (a/2)(y_t - y_t^*)^2 + (c/2)q_{t+1}^2 + (b/2)(q_t + y_t - q_{t+1} - c_t^*)^2. \tag{57$'$}$$

这就可以写出修正后的问题的一阶条件：

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{E}_t(\partial C_t/\partial y_t) = \mathrm{E}_t[a(y_t - y_t^*) + b(q_t + y_t - q_{t+1} - c_t^*)] \\ &= (a+b)y_t - (ay_t^* + bc_t^*) + b(q_t - \mathrm{E}_t q_{t+1}), \end{aligned} \tag{59a}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{E}_t\left(\frac{\partial C_t}{\partial q_{t+1}} + \beta\frac{\partial C_{t+1}}{\partial q_{t+1}}\right) \\ &= \mathrm{E}_t[cq_{t+1} - b(q_t + y_t - q_{t+1} - c_t^*) + b\beta(q_{t+1} + y_{t+1} - q_{t+2} - c_{t+1}^*)] \\ &= b\mathrm{E}_t\{(1 - \beta L^{-1})(c_t^* - y_t) - [1 - (1 + \beta + b^{-1}c)L^{-1} + \beta L^{-2}]q_t\}. \end{aligned} \tag{59b}$$

联立以上两式消去 y_t，经整理后得

$$\mathrm{E}_t[(1 - \lambda L^{-1})(1 - \lambda_1 L^{-1})q_t] = \mathrm{E}_t[(1 - \beta L^{-1})(c_t^* - y_t^*)], \tag{60}$$

其中 λ,λ_1 满足

$$\begin{cases} \lambda + \lambda_1 = 1 + \beta + c/a + c/b, \quad \lambda\lambda_1 = \beta, \\ 0 < \lambda < \beta < \lambda_1. \end{cases}$$

由方程(60)解出

$$\begin{aligned} q_t - \lambda_1 \mathrm{E}_t q_{t+1} &= \mathrm{E}_t[(1 - \beta L^{-1})(1 - \lambda L^{-1})^{-1}(c_t^* - y_t^*)] \\ &= \lambda_1(c_t^* - y_t^*) + (1 - \lambda_1)\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j \mathrm{E}_t(c_{t+j}^* - y_{t+j}^*). \end{aligned}$$

以此代入式(59a)消去 $\mathrm{E}_t q_{t+1}$，得

$$y_t = y_t^* + \frac{b(\beta - \lambda)}{\beta(a+b)}[(1 - \lambda L^{-1})^{-1}(c_t^* - y_t^*) - q_t]. \tag{61}$$

考虑以下特殊情况：设 c_t^* 与 y_t^* 为白噪声，则

$$\mathrm{E}_t[(1 - \lambda L^{-1})^{-1}(c_t^* - y_t^*)] = c_t^* - y_t^*;$$

代入式(61)后得(注意 $y_t = \mathrm{E}_t y_t$)

$$y_t = \frac{b(\beta - \lambda)(c_t^* - q_t) + (a\beta + b\lambda)y_t^*}{\beta(a+b)}. \tag{62}$$

式(62)表明，y_t 与 y_t^*、c_t^* 正相关，与 q_t 负相关；直观上，这是合理的.

参考文献

[1] Abel A B. Risk premia and term premia in general equilibrium[J]. J. Monetary Eco., 1999, 43: 3-33.

[2] Campbell J Y, Cochrane J H. By force of habit: a consumption-based explanation of aggregate stock market behavior[J]. J. Political Eco., 1999, 107: 205-251.

[3] Duffie D J, Epstein L G. Asset pricing with stochastic differential utility [J]. Rev. Financial Studies, 1992, 5: 411-436.

[4] Eichenbaum M S. A rational expectations equilibrium model of investories of finished goods and employment[J]. J. Monetary Eco., 1983, 29: 259-277.

[5] Eichenbaum M S. Rational expectations and the smoothing properties of investories of finished goods[J]. J. Monetary Eco., 1984, 14: 71-96.

[6] Epstein L G, Zin S E. Substitution, risk aversion and the temporal behavior of consumption and asset returns[J]. Econometrica, 1989, 57: 937-969.

[7] Hansen L P, Singleton K J. Stochastic consumption, risk aversion and the temporal behavior of asset returns[J]. J. Political Eco., 1983, 91: 249-265.

[8] McCallum B T. Price level determinacy with an interest rate policy rule and rational expectations[J]. J. Monetary Eco., 1981, 8: 319-329.

[9] Sargent T J. Macroeconomic Theory[M]. 2nd ed. Boston: Academic Press, 1987.

第3章　随机分析初步

现在，我们转入占本书更大篇幅的连续时间随机模型. 然而，对这类模型的描述与分析，需要随机分析这一精巧的数学工具. 随机分析并不是三言两语就能交代清楚的. 因此，我们不得不中断具体经济模型的讨论，专辟一章来介绍随机分析的最基本的内容.

约于20世纪中叶开始发展起来的随机分析，是一个极富特色且已得到广泛应用的数学理论. 它的系统展开依赖于现代概率论的许多深刻成果. 在本章中，我们仅从分析动态宏观经济模型的实际需要着眼，给出随机分析的最初步的概念框架，并从便于实际运用的角度解释其基本公式与结论. 由于所用理论工具的限制(如限于均方理论)，对所涉及的随机过程必然作较强的限定，对这些限定的准确描述与严格验证都不很简单，而我们仅指出这类限定总能满足. 所有较长的证明都予以省略. 凡能给出某种直观解释的地方，均采用应用学科中流行的直观语言，而尽力避免严格的抽象表述. 当然，在这样做时也以不陷入概念错误为限.

本章内容依随机微积分、随机微分方程与随机最优化这样一个自然顺序展开. 理论基础固然是随机微积分，但从本节的实际需要来看，我们关注的重点无疑是随机最优化.

3.1　随机微积分

如所熟知，对于连续变量的数理分析以微积分为基本工具. 与此相对照，对于依赖于连续时间的随机变量的分析或者随机分析，以随机微积分为其基本工具似乎是顺理成章的. 实际上，可以说事情基本如此. 不过，与通常的微积分相比，随机微积分差异颇大，它的两个最明显的特点如下所述.

(i) 随机微积分可通过多种实质上互有差异的途径引入. 本书仅考虑Itô微积分. 它虽然只是多种可能的随机微积分之一，但因其突出的优点而最为常用，很自然地在应用中成为首选对象.

(ii) 随机积分处于主导地位. 随机微分不像普通微分那样是一个可以独立定义的概念；实际上，它原不过是随机积分的某种形式衍生物. 不过，从形式上看，随机微分的规则和公式与普通微分的是高度对应的. 从运用的角度来看，这

一点正是最有意义的.

本节内容依随机函数、随机积分与随机微分的自然顺序展开,中心论题是随机积分.

3.1.1 随机函数

A. 随机过程

随机微积分,简单地说就是关于依赖于连续时间变量 t 的随机函数的微积分学.时间变量的随机函数,也就是随机过程.作为建立随机微积分的预备,自然要概述有关随机过程的最基本的概念与事实.第2章中处理随机序列时,实际上已接触到随机过程了.一般地,任何随时间变化的随机变量都是随机过程;它用来描述带有不确定性的时变现象是再自然不过的了,在经济分析中尤其如此.在本章中,只考虑连续时间的随机过程,假定时间 t 变动于某个区间 J,通常取 $J=\mathbf{R}_+=[0,\infty)$.形式上,给定一个随机过程 x,意味着给定一个二元函数

$$x(t,\omega):J\times\Omega\to\mathbf{R},$$

其中 Ω 是某个给定的概率空间,$x(t,\omega)$ 关于 ω 在 Ω 上 $\mathscr{F}$-可测($\mathscr{F}$ 是由 Ω 中的事件构成的 σ- 代数).对于每个给定的时间 $t\in J$,$x(t,\omega)$ 作为**机会** ω 的函数是一个随机变量;在这个意义上,x 是一族随时间变动的随机变量 $\{x_t=x(t,\cdot):t\in J\}$.另一方面,对每个给定的 $\omega\in\Omega$,$x(t,\omega)$ 作为时间 t 的函数称为随机过程 x 的轨道;在这个意义上,x 是一族随机会 ω 变动的轨道 $\{x(\cdot,\omega):\omega\in\Omega\}$,$x$ 关于 t 的性质(如连续性、可微性等),均称为**轨道性质**.例如,"x 是轨道连续的"意指 $x(t,\omega)$ 对 t 是连续的.同时影响 x 的两个因素 t 与 ω 并不对等.通常更强调 x 对 t 的依赖性,且将 $x(t,\omega)$ 简写作 $x(t)$ 或 x_t;至于 x 对 ω 的依赖性,则认定已隐含于其中了.机会 ω 及概率空间 Ω(或写作($\Omega,\mathscr{F},P$))的存在尽管是随机过程理论的逻辑前提,但其形态并不直观明朗,通常不直接提到它,只需将其存于心中就够了.在最初步的考虑中,不妨就将 $x(t)$ 看作类似于普通函数的函数,所不同的只是 $x(t)$ 仅在统计的意义上被确定.正因为如此,我们更偏向于对 $x(t)$ 采用随机函数这一名称.

当然,随机函数 $x(t)$ 与普通函数性质上的差别毕竟是一个不可忽视的问题.一个值得注意的事实是,即使是常用而似乎标准的随机过程,如Poisson 过程与 Brown 运动,其轨道性质都较差.为改善轨道性质,通常从 Ω 中除掉某个例外集不予考虑,这就导致**几乎必然**(a.s.)轨道性质的概念.例如,若

$$P(x(t)\text{ 对 }t\text{ 不处处连续})=0\quad(P\text{ 表概率}),$$

则说随机函数 $x(t)$ 几乎必然轨道连续,简写作a.s.轨道连续;a.s.轨道连续与必然连续的随机函数实际上不必区别.为方便起见,今后用到的随机函数 $x(t)$,都假定是轨道连续的,且关于 (t,ω) 可测.后一要求从逻辑上看无疑是很强的,

但在应用问题中并不构成真正的限制. 所以,上述约定今后将不再另作说明.

在经济分析中,除了考虑描述经济变量的若干随机函数(如 $x(t)$,$y(t)$ 等)之外,往往同时使用一族随时间展开的**信息集** I_t,且假定 I_t 包含了所涉及变量(如 $x(t)$,$y(t)$ 等)携带的至时间 t 为止的信息. 后一假定推出

$$\mathrm{E}_t x(s) = x(s) \quad (s \leqslant t),$$

其中 $\mathrm{E}_t = \mathrm{E}_t(\cdot \mid I_t)$ 表示在已知 I_t 中信息条件下的**条件期望**,而 $x(t)$ 是问题所涉及的随机函数. 此外还假定,若 $s \geqslant t$,则 $x(s) - x(t)$ 与 I_t 独立;直观上,这意味着用过去的信息不足以预测 x 在未来的变化,因而随机函数 x 是**非预期的**. 如同概率空间 Ω 一样,信息集 I_t 的严格描述需要稍多的数学概念,不宜在此作详细解释. 而且,除非确有必要,今后一般也不直接提及信息集 I_t,它与概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 一样,只需存于心中就够了.

B. 扩散过程

前面将随机过程界定为随时间变化的随机变量. 在如此一般的定义下,对于随机过程我们几乎推断不出任何有实质性意义的结论,因而并不能用来解决问题. 这就表明,真正有应用价值的随机过程,必定为某些特殊条件所限定. 对于在经济分析中常用的随机过程,我们依次提出如下三个条件.

(i) **Markov 性**. 设 x 是定义于区间 $\mathbf{R}_+$ 上的一个随机过程,记 $x_t = x(t)$. 若对任一组时间 $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t < \infty$ 与任何实数 r,有

$$P(x_t < r \mid x_{t_0}, x_{t_1}, \cdots, x_{t_n}) = P(x_t < r \mid x_{t_n}), \tag{1}$$

记号 $P(A \mid X)$ 记事件 A 在随机变量 X 下的条件概率,则说 x 具有Markov 性,或称 x 为**Markov 过程**. 直观上,x 是Markov 过程,意味着在已知当前状态的条件下,x 的未来状态与过去无关(即无后效性),这就表明,用 Markov 过程所描述的系统如同用某个微分方程所确定的系统一样,其未来取决于初始状态. 下面我们将看到,应用上最重要的一类Markov 过程正好与随机微分方程联系在一起.

(ii) **平稳性**. 若随机过程 x 在任何时段 $[t,s]$$(t<s)$ 上的增量 $x_s - x_t$ 的分布仅依赖于时段长度 $s-t$,则称 x 为**齐次过程**,或说它具有平稳性. 直观上,平稳性意味着系统的变化仅取决于它所经历的时间跨度,而与其起讫时点无关. 可以认为,进入平稳发展阶段的经济过程都是齐次过程. 值得注意的是,齐次过程通常是与自治系统联系在一起的.

(iii) **扩散过程**. 设 $x(t)$ 是一个Markov 过程,为简单起见,假定它是齐次的;设 $f(t,x,y)$ 是条件分布

$$P(x(s+t) \leqslant y \mid x(s) = x)$$

的概率密度,称为**转移密度函数**. 若存在函数 $\alpha(x)$ 与 $\beta^2(x)$,使得对任给 $\delta > 0$,当 $0 < t \to 0$ 时关于 $x \in \mathbf{R}$ 一致地有

$$\int_{|y-x|\geqslant\delta} f(t,x,y)\mathrm{d}y = o(t), \tag{2a}$$

$$\int_{|y-x|<\delta} (y - x)f(t,x,y)\mathrm{d}y = \alpha(x)t + o(t), \tag{2b}$$

$$\int_{|y-x|<\delta} (y - x)^2 f(t,x,y)\mathrm{d}y = \beta^2(x)t + o(t), \tag{2c}$$

则称 $x(t)$ 为扩散过程，$\alpha(x)$ 与 $\beta^2(x)$ 分别称为 $x(t)$ 的**漂移系数**与**扩散系数**. 若式(2b)、式(2c)中的积分可换为 $\int_{-\infty}^{\infty}$，则有

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\mathrm{E}[x(t) - x(0) | x(0) = x] \\ &= \lim_{t\to 0}\mathrm{E}\left[\frac{x(t) - x(0)}{t}\middle| x(0) = x\right];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta^2(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\mathrm{E}[(x(t) - x(0))^2 | x(0) = x] \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\mathrm{Var}[x(t) - x(0) | x(0) = x].\end{aligned}$$

粗略地说，扩散过程有有限的瞬时移动速度与位移方差，而 $\alpha(x)$ 与 $\beta^2(x)$ 分别为系统在 x 处的平均瞬时速度与位移方差.

一个齐次扩散过程可等价地用转移密度函数 $f(t,x,y)$ 或用漂移系数 $\alpha(x)$、扩散系数 $\beta^2(x)$ 确定. 在已知 $f(t,x,y)$ 的条件下，$\alpha(x)$ 与 $\beta^2(x)$ 分别由式(2b)与式(2c)决定. 反之，若已知 $\alpha(x)$ 与 $\beta^2(x)$，则 $f(t,x,y)$ 可由偏微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\alpha(x)\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2}\beta^2(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{3a}$$

或

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial(\alpha(y)f)}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\beta^2(y)f)}{\partial y^2} \tag{3b}$$

及适当的附加条件(如边界条件)确定. 方程(3a)与方程(3b)分别称为后向方程与前向方程，统称为 **Kolmogorov 方程**.

C. Brown 运动

在 2.1 节中我们看到，白噪声可用作构成平稳序列的基本构件. 这就不免让人猜度：对于扩散过程是否有类似的构成法？完全对应的解决方案似乎并不存在，但的确存在一个特殊的扩散过程，即下面就要介绍的 Brown 运动，它对于一般扩散过程的构成有重要作用.

所谓Brown 运动是这样一种随机过程 $u(t)$，它满足如下条件.

(i) **独立增量性**：$u(t)$ 在互不相交的时段上的增量互相独立，这意味着，若 $0 \leqslant t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < \cdots < t_n < s_n$，则 $u(s_i) - u(t_i)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 互相独立.

(ii) **正态性**：若 $0 \leqslant t < s < \infty$，则 $u(s) - u(t) \sim N(0,\sigma^2(s-t))$；$u(0) = 0$. σ^2 也记作 σ_u^2（不太准确地，称 σ_u^2 为 Brown 运动 $u(t)$ 的方差）；当 $\sigma = 1$ 时称

$u(t)$ 为标准 Brown 运动.

由条件(i)、(ii)可以推出，Brown 运动 $u(t)$ 必为齐次扩散过程，其漂移系数与扩散系数分别为 0 与 σ^2，而转移密度函数为

$$f(t,x,y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 t}\right]. \tag{4}$$

直观上，可想象一个 Brown 运动 $u(t)$ 描述了这样的随机运动：平均来说运动质点位于原点，但扰动方差与时间成正比地扩大. 有趣的是，可将 Brown 运动 $u(t)$ 比拟于如下随机序列：

$$u_t = \sum_{j=1}^{t}\varepsilon_j, \quad u_0 = 0, \tag{5}$$

其中 ε_t 是方差为 σ^2 的白噪声. 对于由式(5)表示的 u_t，注意有

$$\mathrm{E}u_t = 0, \quad \mathrm{Var}u_t = \sigma^2 t,$$

这与 Brown 运动 $u(t)$ 的性质 $u(t) \sim N(0,\sigma^2 t)$ 颇为类似.

为展开随机积分之需要，在条件(i)、(ii)之外，对于一 Brown 运动 $u(t)$ 还附加以下十分重要的条件.

(iii) 若 $0 \leqslant t < s < \infty$，则增量 $u(s) - u(t)$ 与信息集 I_t 独立，即 $u(t)$ 是非预期的.

今后将不加说明地利用以上假定. 为了说明条件(iii)在论证中的重要性，考虑以下例子.

命题　设 u,v 是 Brown 运动，则 $w = u + v$ 亦为 Brown 运动.

证　首先，$w(0) = 0$. 若 $0 \leqslant t < s < \infty$，则

$$w(s) - w(t) = [u(s) - u(t)] + [v(s) - v(t)] \sim N(0,\sigma_w^2(s-t)),$$

其中 $\sigma_w^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2 + 2\sigma_{uv}$，$\sigma_{uv}$ 取决于

$$\mathrm{cov}[u(s) - u(t), \quad v(s) - v(t)] = \sigma_{uv}(s-t).$$

设 $t < t + \Delta t \leqslant s < s + \Delta s$，$\Delta u(t) = u(t+\Delta t) - u(t)$，$\Delta w(t)$ 等，仿此，则

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[\Delta w(t)\Delta w(s)]\\&= \mathrm{EE}_s[\Delta u(t)\Delta u(s) + \Delta u(t)\Delta v(s) + \Delta v(t)\Delta u(s) + \Delta v(t)\Delta v(s)]\\&= 0 = \mathrm{E}[\Delta w(t)]\mathrm{E}[\Delta w(s)],\end{aligned}$$

其中用到 $\Delta u(s)$，$\Delta v(s)$ 独立于 I_s. □

3.1.2　随机积分[①]

与通常的微积分学不同，随机微积分学是从积分开始，然后引入微分的. 在

---

① 此处所介绍的随机积分是 Itô(1944)引入的，因而称为 Itô 积分. 但类似的概念甚至可追溯到 Wiener(1923). Itô 积分初看起来有点怪异，并非很快被人接受，只是数十年后才成为数学家与应用科学家手中的流行工具. 对于 Itô 积分的完善与推行，俄罗斯数学家功不可没，尤其值得提到 Gihman-Skorohod(1972)，Arnold(1974)等人的工作.

本小节中,我们从类似于通常积分学的思路展开随机积分理论:作为某种积分和的极限定义随机积分;然后介绍随机积分的主要性质;进而考虑不定积分. 从应用的角度看,关注的重点是积分的性质.

A. 定义

如同普通积分一样,随机积分定义为某个积分和的极限. 首先指明,对于随机变量使用均方收敛意义下的极限. 例如,若 $x, x_n (n = 1,2,\cdots)$ 是随机变量,则当 $\mathrm{E}|x_n - x|^2 \to 0 (n \to \infty)$ 时说 $\{x_n\}$ **均方收敛**于 x ①,记作

$$\underset{n}{\mathrm{l.i.m}}\, x_n = x.$$

给定区间 $J = [a,b]$ 上的一个随机函数 $x(t)$, 今考虑 $x(t)$ 在 J 上的随机积分. 为使积分存在且有较好的性质,对 $x(t)$ 作如下较强的假定.

(i) $x(t,\omega)$ 作为 $J \times \Omega$ 上的函数是可测的.

(ii) $x(t)$ 对 t 在 J 上均方连续,即 $\forall\, t_0 \in J$, 有

$$\underset{t \to t_0}{\mathrm{l.i.m}}\, x(t) = x(t_0).$$

(iii) $x(t)$ 在 J 上平方可积,即

$$\int_a^b \mathrm{E}|x(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty. \tag{6}$$

今后只要用到随机积分,就不加说明地认定其中涉及的随机函数已满足以上条件. 至于在经济分析中处理的随机函数是否满足这些条件,并不是一个理论问题,也不必考虑如何去验证它. 数学假定的合理性,总是由基于这些假定的理论的实际应用效果来证实的.

下面考虑关键的问题:如何用 $x(t)$ 构成一个积分和? 我们从如下事实得到启发:一个随机序列 y_t 典型地可表为

$$y_t = \sum_{j=0}^{n} b_j \varepsilon_{t-j} \qquad \text{(依 2.1 节式(22))}$$

$$= \sum_{j=t-n}^{t} b_{t-j} \Delta u_j. \qquad \text{(u_t 依式(5))}$$

如果以某个Brown 运动 $u(t)$ 替换上式中的 u_t, 以 $x(t)$ 替换 b_j, 则导向考虑积分和

$$\sum_{j=1}^{n} x(t_{j-1}) \Delta u(t_j),$$

其中 $\Delta u(t_j) = u(t_j) - u(t_{j-1})$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ 是区间 J 的任一划分. 这就自然定义

---

① 注意均方收敛原不过是 Hilbert 空间 $L^2(\Omega)$ 中的范数收敛. $\forall\, x \in L^2(\Omega)$, 有 $\|x\| = (\mathrm{E}|x|^2)^{1/2}$, 因而 $\mathrm{E}|x_n - x|^2 \to 0 \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0 (n \to \infty)$.

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}u(t) = \underset{\max\Delta t_j \to 0}{\mathrm{l.i.m}} \sum_{j=1}^{n} x(t_{j-1})\Delta u(t_j). \tag{7}$$

进而规定，若对任何 $b > a$，式(7)中的积分存在，则定义

$$\int_a^\infty x(t)\mathrm{d}u(t) = \underset{b\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \int_a^b x(t)\mathrm{d}u(t). \tag{8}$$

由式(7)、式(8)定义的积分就称为随机积分或**Itô积分**. 今后使用积分式(7)时，一般使用较简略的记号 $\int_a^b x\mathrm{d}u$ 或 $\int_a^b x(t)\mathrm{d}u$.

从形式上看，积分式(7)似乎就是通常的Riemann-Stieltjes 积分的推广. 但对于随机积分有一些不可忽略的特点值得特别强调. 首先注意，积分和中的 $x(t_{j-1})$ 不能代之以 $x(\tau_j)(\tau_j \in (t_{j-1}, t_j])$，这一点的理由并不明显但关系重大，且这正是Itô积分的精巧之处. 其次，式(7)中的极限是依均方收敛而非普通收敛取的；因此，积分的结果得到一个平方可积的随机变量(随机变量 ξ 平方可积 $\Leftrightarrow \mathrm{E}\xi^2 < \infty$)，而并非如普通积分一样得到一确定实数.

最后指出，在已提到的关于 $x(t)$ 的假定下，由式(7)定义的积分必定存在. 这一事实的严格证明并不简单，这些都不是此处所宜考虑的. 总之，对于积分的有效运用，真正重要的是熟悉其性质；至于积分的严格定义及与定义有关的严格论证，在应用问题中都是不必提及的.

B. 性质

现在概述随机积分的主要性质. 如前面已指出的，这对于随机积分的应用是根本的. 以下设 u, v 是给定的Brown 运动，x, y 是给定的随机函数. 首先，随机积分定义的明显的"Riemann-Stieltjes 形式"直接导向如下简单性质.

(i) **线性性**. 设 α, β 为常数(或平方可积随机变量)，则

$$\int_a^b (\alpha x + \beta y)\mathrm{d}u = \alpha\int_a^b x\mathrm{d}u + \beta\int_a^b y\mathrm{d}u,$$

$$\int_a^b x\mathrm{d}(\alpha u + \beta v) = \alpha\int_a^b x\mathrm{d}u + \beta\int_a^b x\mathrm{d}v.$$

(ii) **可加性**. 设 $a < c < b$，则

$$\int_a^b x\mathrm{d}u = \int_a^c x\mathrm{d}u + \int_c^b x\mathrm{d}u.$$

以上性质无疑是平凡的，而且也无关乎积分的随机本质. 下面的一组性质则明显地依赖于Brown 运动的统计特性，因而是更具本质意义的.

(iii) **均值性**. 设 $\mathrm{E}_t = \mathrm{E}(\cdot \mid I_t)$ (参看 3.1.1A)，则

$$\mathrm{E}_a\int_a^b x\mathrm{d}u = 0 = \mathrm{E}\int_a^b x\mathrm{d}u. \tag{9}$$

为使式(9)在直观上显得更为自然，不妨将式(9)与如下熟知的结果进行对比：

$$\mathrm{E}_t \sum_{j>t} b_j \varepsilon_j = 0.$$

式(9)的重大意义在于:适当地取期望,可简单地消去某些含随机积分的项.这就为简化含随机积分的式子提供了一个极简便的方法,这一方法用处之大,下面将有许多机会体会到这一点.

(iv) **等距性**. 意指以下等式成立:

$$\mathrm{E}\left|\int_a^b x\mathrm{d}u\right|^2 = \sigma_u^2\int_a^b \mathrm{E}|x(t)|^2\mathrm{d}t. \tag{10}$$

"等距"一词的解释如下. 以 $L^2(\Omega)$ 记 Ω 上的平方可积随机变量之全体,以 $\mathscr{L}^2$ 记 $[a,b]$ 上满足条件(6)的可测随机函数之全体, $L^2(\Omega)$ 与 $\mathscr{L}^2$ 分别依范数

$$\|\xi\| = (\mathrm{E}\xi^2)^{1/2} \text{ 与 } \|x\| = \sigma_u\left(\int_a^b \mathrm{E}|x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

成为Hilbert 空间,则式(10)(加上随机积分的性质(i))表明,由随机积分所定义的映射

$$\mathscr{L}^2 \to L^2(\Omega), \quad x(t) \to \int_a^b x(t)\mathrm{d}u$$

是一个等距同构. 这一解释使我们得以运用Hilbert 空间理论中的某些相关结果. 例如,等距性的一个直接推论是

$$\mathrm{E}\left[\int_a^b x\mathrm{d}u\int_a^b y\mathrm{d}u\right] = \sigma_u^2\int_a^b \mathrm{E}[x(t)y(t)]\mathrm{d}t. \tag{11}$$

其次,由等距性推出,若随机函数序列 $\{x_n(t)\}$ 满足

$$\int_a^b \mathrm{E}|x_n(t) - x(t)|^2\mathrm{d}t \to 0 \quad (n \to \infty),$$

即在空间 $\mathscr{L}^2$ 中 $x_n \to x$, 则有以下极限公式:

$$\underset{n}{\mathrm{l.i.m}} \int_a^b x_n\mathrm{d}u = \int_a^b x\mathrm{d}u.$$

必须强调指出,随机积分的性质(iii)、(iv)强烈地依赖于Brown 运动的统计特性及条件(6). 这也表明,限定满足条件(6)是必要与合理的.

C. 不定积分

从逻辑上看,考虑不定积分

$$X(t) = \int_a^t x(s)\mathrm{d}u(s) \tag{12}$$

如同考虑通常的不定积分

$$F(t) = \int_a^t f(s)\mathrm{d}s \tag{13}$$

一样自然. 而更具启发性的是,式(12)明显地对应于平稳序列的Wold 表示

$$x_t = B(L)\varepsilon_t = \sum_{j\leqslant t} b_{t-j}\Delta u_j,$$

其中 $B(L) = \sum_0^\infty b_j L^j$, u_t 依式(5). 这就自然希望,形如式(12)的不定积分将用

作表示随机函数的重要工具.

如所熟知,形如式(13)的不定积分有一系列良好的性质.在某些方面,式(12)中的 $X(t)$ 颇类似于式(13)中的 $F(t)$(如连续性);而 $X(t)$ 的统计特性,则完全依赖于式(12)中积分的随机本质,因而非 $F(t)$ 所能比拟.

(i) **连续性**. $X(t)$ 均方连续,且a.s.轨道连续.不失一般性,今后总认定 $X(t)$ 轨道连续,通常就简单地说 $X(t)$ 是连续的.

(ii) **均值性质**. 直接由式(9)推出 $\mathrm{E}X(t)=\mathrm{E}_aX(t)=0(t\geqslant a)$. 注意到

$$X(s)=X(t)+\int_t^s x\mathrm{d}u \quad (a\leqslant t<s),$$

得

$$\mathrm{E}_tX(s)=X(t) \quad (a\leqslant t<s). \tag{14}$$

这表明 $X(t)$ 是一个鞅.这一结论具有重要意义.

对于随机函数 $x(t)$,除了前面定义的Itô积分之外,还可以考虑其**轨道积分**,即将 $x(t)$ 看作二元函数 $x(t,\omega)$ 时对时间 t 的积分:

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}t=\int_a^b x(t,\omega)\mathrm{d}t.$$

如同Itô积分一样,如上积分的结果也得到一个随机变量.

在很多情况下,轨道积分与Itô积分组合在一起使用,其一般形式是

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+\int_a^b g(t)\mathrm{d}u,$$

其中 $f(t)$ 与 $g(t)$ 是两个随机函数,$u(t)$ 是一个Brown运动,并假定上式中的两个积分均存在.为书写简便,常将如上的积分式缩写成

$$\int_a^b[f(t)\mathrm{d}t+g(t)\mathrm{d}u] \quad \text{或} \quad \int_a^b(f\mathrm{d}t+g\mathrm{d}u).$$

对这样的积分,自然也可以考虑不定积分

$$X(t)=\int_a^t[f(s)\mathrm{d}s+g(s)\mathrm{d}u].$$

在对 $f(\cdot),g(\cdot)$ 的通常假定下,$X(t)$ 是轨道连续的随机函数,且

$$\mathrm{E}_aX(t)=\mathrm{E}_a\int_a^t f(s)\mathrm{d}s.$$

以上事实,今后将不加说明地使用.

3.1.3 随机微分

在Itô微积分学的框架内,微分并无独立意义:它只是积分的某种衍生物.但这并不妨碍对Itô微分建立一套系统的形式规则;这些规则与通常微分规则虽然略有差异,但其运用之方便,亦足以令人满意.

A. 定义

对于不定积分(12),一个源于经典微积分学的自然想法是,似乎应有 $\mathrm{d}X=$

$x\mathrm{d}u$，即

$$\mathrm{d}\int_a^t x(s)\mathrm{d}u(s) = x(t)\mathrm{d}u(t).$$

如果依据通常微分的意义，将上式解释为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t x(s)\mathrm{d}u(s) = x(t)u'(t),$$

则导致一个无意义的结果：因可严格证明，$u'(t)$ 几乎必然地不存在. 这就造成了一种令人遗憾的局面：通常微积分学中的基本公式，即 Newton-Leibniz 公式，并不适用于随机微积分. 然而，Newton-Leibniz 公式的巨大价值强烈地促使人们力求保持其地位，即使只是形式上保持也罢. 这就引导出一个初看起来似乎是纯形式的定义：若某个随机函数 $x(t)$ 有如下积分表示：

$$x(t) = x(a) + \int_a^t f(s)\mathrm{d}s + \int_a^t g(s)\mathrm{d}u(s), \tag{15}$$

其中 $f(t)$ 与 $g(t)$ 均为区间 $J=[a,b)$ 上的随机函数（当然亦可以是普通函数），积分

$$\int_a^t f(s)\mathrm{d}s \quad 与 \quad \int_a^t g(s)\mathrm{d}u(s)$$

分别为普通积分与Itô积分，则约定 $\mathrm{d}x = f\mathrm{d}t + g\mathrm{d}u$，或

$$\mathrm{d}x(t) = f(t)\mathrm{d}t + g(t)\mathrm{d}u(t), \tag{15$'$}$$

并称 $\mathrm{d}x(t)$ 为 $x(t)$ 的随机微分或**Itô微分**. 由此可见，随机微分(15)′原不过是积分表示式(15)的一种改写而已，除此之外并无独立意义. 然而，正是这一改写，使得我们刻意要保留的 Newton-Leibniz 公式至少在形式上获得了意义：因利用式(15)′现在可将式(15)写成

$$\int_a^t \mathrm{d}x(s) = x(s)\Big|_a^t, \tag{16}$$

或者等价地有

$$\mathrm{d}\int_a^t [f(s)\mathrm{d}s + g(s)\mathrm{d}u(s)] = f(t)\mathrm{d}t + g(t)\mathrm{d}u(t). \tag{16$'$}$$

无论是式(16)还是式(16)′，在形式上与通常的 Newton-Leibniz 公式已无差别. 当然，读者会说，这一切都不过是记号上的一个戏法，真正本质的东西，仅积分式(15)而已. 但读者将很快看到，利用式(16)这一类的公式在方法上可收到许多好处.

读者可能希望在式(15)′的基础上再往前走一步，推出

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f + g\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}. \tag{15$''$}$$

然而，式(15)″是否真有意义，这就要看如何理解“导致”$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 与 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ 了. 如前所述，在通常的意义上，导数 $u'(t)$ 并不存在，因此，在通常的意义上，式(15)″确

无意义. 另一方面,若将 dt 理解为很短的时间(但不看作无穷小!),且认定

$$du = u(t + dt) - u(t) \tag{17}$$

是 u 在时段 $[t, t + dt]$ 上的增量,则 du/dt 当然有完全严格的意义,且能准确地写出

$$E_t(du/dt) = 0, \quad Var_t(du) = \sigma_u^2 dt. \tag{18}$$

类比式(17)亦可约定 $dx = x(t + dt) - x(t)$,但依此约定却不能使式(15)″严格地成立. 尽管如此,在应用领域仍然广泛地使用式(15)″这类公式,并称 du/dt (有时就写作 $u'(t)$)为白噪声. 这当然是考虑到 du/dt 起着类似于白噪声 ε_t 的作用. 在Brown 运动的应用中,使用记号 du 的机会远多于单独使用记号 u,因而人们干脆就称 du 为 Brown 运动,称 $\sigma_u^2 dt$ 是 du 的方差,而实际上严格地说, du 是 Brown 运动 u 的增量. 类似地,说到 Brown 运动 du 与 dv 不相关时,当然是指 u 与 v 不相关. 所有上述记号与术语似乎都有"混用"之嫌,但实际上并未导向混乱,倒是带来不少方便. 鉴于此,本书亦追随在应用领域中已流行的做法,而不以纯数学的严格标准予以品评与限制.

B. Itô公式

本来纯属形式约定的随机微分,最终居然成了随机分析中起重大作用的基本工具,关键在于 Itô(1951)建立了一个微分公式,应用该公式解决了对复合函数求随机微分的问题. 以 Itô公式为基础,对随机微分可建立一套简便可行的微分规则,它们在形式上与用法上都与普通的微分规则恰相对应. 这样,随机微分就成为如同通常微分一样便于运用的工具,其合法性就自然确立了. 因此不足为怪,Itô公式一直被看作Itô微积分学的基石;在有关文献中,它也以**Itô引理**著称.

Itô公式初看起来颇带神秘性,且其推导不易,向来成为初学随机微积分者的一道关卡. 其实,Itô公式的表示与用法都是很简单的. 设 $F(t,x)$ 是给定的普通函数,它有对 t 的一阶与对 x 的二阶连续偏导数; $x(t)$ 是表如式(15)的随机函数,则复合函数 $F[t,x(t)]$ 是一个随机函数,它的随机微分 $dF(t,x)$ 可用如下 Itô公式计算:

$$dF(t,x) = F_t dt + F_x dx + \frac{1}{2} F_{xx} (dx)^2, \tag{19}$$

其中 $F_t = F_t[t,x(t)]$, F_x 与 F_{xx} 仿此; dx 依式(15)′,而

$$(dx)^2 = (f dt + g du)^2 = g^2 \sigma_u^2 dt,$$

这相当于认定

$$(dt)^2 = dt du = 0, \quad (du)^2 = \sigma_u^2 dt. \tag{20}$$

利用式(20),可将 Itô公式(19)改写成更具体的形式:

$$dF(t,x) = \left(F_t + F_x f + \frac{1}{2} \sigma_u^2 g^2 F_{xx}\right) dt + F_x g du. \tag{19'}$$

另一方面，显然亦可将式(19)改写成表面上更长的公式：

$$dF(t,x) = F_t dt + F_x dx + \frac{1}{2}[F_{tt}(dt)^2 + 2F_{tx}dtdx + F_{xx}(dx)^2].$$

这就表明，在遵循式(20)的前提下，Itô公式相当于：

$$dF = F \text{ 的 Taylor 展开式的一阶项与二阶项之和.} \tag{21}$$

只要记住规则(21)与式(20)，Itô公式的运用就畅通无阻了，并不需去记更具体的式(19)′. 而且，式(21)是高度一般化的，即使将 $F(t,x)$ 替换为 $F(t,x_1,\cdots,x_n)$，或者 F 为向量值函数，式(21)仍然保持有效(这是要点！). 当然，应记住，运用式(21)时必须结合使用式(20).

式(20)称为随机微分的**乘法表**，今后将大量使用，且对其用法将不再另行说明. Itô公式的神秘之处，主要源于乘法表(20). 对式(20)的一个粗略解释是：由式(18)有

$$E(du)^2 = \mathrm{Var}(du) = \sigma_u^2 dt,$$

这表明式(20)的后一式"平均地"成立. 因 $(dt)^2$ 与 $dtdu$ 相对于 dt 为更高阶的无穷小，故在计算 $dF(t,x)$ 时均可舍去，这就导向式(20)中的前一约定.

若 $g = 0$，即 $dx = fdt$，则式(19)重合于通常的微分公式：

$$dF = F_t dt + F_x dx.$$

Itô公式的特殊之处正在于二阶项 $\frac{1}{2}F_{xx}(dx)^2$ 的出现，这也是随机微分区别于通常微分的地方.

C. 随机微分规则

通常微分学的一个熟知事实是：复合函数微分规则是导出所有其他微分规则的一条**母规则**. 被看作复合函数微分规则的Itô公式，在随机微分学中亦起同样的作用. 下面利用Itô公式导出一些常用的微分规则. 下面当提到 x,y 等时，总认定随机微分 dx,dy 等均有意义.

(i) **复合函数微分规则**. 这是一种特殊情况. 设 $f(\cdot)$ 有二阶连续导数，则直接由Itô公式(19)有

$$df(x) = f'(x)dx + \frac{1}{2}f''(x)(dx)^2. \tag{22}$$

式(22)可以说是Itô公式的最常用的形式.

(ii) **对数微分法**. 由式(22)有

$$\begin{cases} d(e^x) = e^x\left[dx + \frac{1}{2}(dx)^2\right], & \text{(23a)} \\ d(\ln x) = \frac{dx}{x} - \frac{(dx)^2}{2x^2}. & \text{(23b)} \end{cases}$$

设 $F = F(t,x)$，以 $\ln F$ 替换式(23a)中的 x，得到

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}(\mathrm{e}^{\ln F}) = F\left\{\mathrm{d}\ln F + \frac{1}{2}[\mathrm{d}(\ln F)^2]\right\}, \tag{24}$$

这就是对数微分公式. 对于 F 表为乘积或幂函数的情况,应用式(24)可明显简化计算.

(iii) **积规则**. 设 $F = Cx_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$, C, α_i 为常数,则

$$\mathrm{d}(\ln F) = \sum_i \alpha_i \mathrm{d}(\ln x_i) = \sum_i \alpha_i\left[\frac{\mathrm{d}x_i}{x_i} - \frac{(\mathrm{d}x_i)^2}{2x_i^2}\right]. \quad \text{(用式(23b))}$$

以此代入式(24)得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{F.} &= \sum_i \alpha_i\left[\frac{\mathrm{d}x_i}{x_i} - \frac{(\mathrm{d}x_i)^2}{2x_i^2}\right] + \frac{1}{2}\left\{\sum_i \alpha_i\left[\frac{\mathrm{d}x_i}{x_i} - \frac{(\mathrm{d}x_i)^2}{2x_i^2}\right]\right\}^2 \\ &= \sum_i \frac{\alpha_i \mathrm{d}x_i}{x_i} - \frac{1}{2}\sum_i \alpha_i(1-\alpha_i)\frac{(\mathrm{d}x_i)^2}{x_i^2} + \sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j\frac{\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j}{x_ix_j},\end{aligned} \tag{25}$$

其中已依乘法表(20)舍去了高阶项.

式(25)涵盖了很多特殊情况. 例如,取 $F = x_1x_2\cdots x_n$ 得

$$\frac{\mathrm{d}(x_1x_2\cdots x_n)}{x_1x_2\cdots x_n} = \sum_i \frac{\mathrm{d}x_i}{x_i} + \sum_{i<j}\frac{\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j}{x_ix_j}. \tag{25$'$}$$

取 $F = xy$, 从式(25)′得出

$$\mathrm{d}(xy) = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{26}$$

结合式(26)与式(16)得到**分部积分公式**

$$\int_a^b y\mathrm{d}x = xy\Big|_a^b - \int_a^b (x\mathrm{d}y + \mathrm{d}x\mathrm{d}y). \tag{27}$$

若 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$ (例如当 $\mathrm{d}x = f\mathrm{d}t$ 时就是如此),则式(26)与式(27)分别重合于通常的乘积微分公式与分部积分公式.

若取 $F = y/x$, 则从式(25)得出

$$\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2}\left(1 - \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) \tag{28a}$$

$$= \frac{y}{x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{\mathrm{d}x}{x}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{d}x}{x}\right). \tag{28b}$$

这就是随机微分的商规则,它比通常微分的商规则多出一项

$$x^{-3}\mathrm{d}x(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y).$$

若 $(\mathrm{d}x)^2 = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$ (例如当 $\mathrm{d}x = f\mathrm{d}t$ 时就是如此),则式(28a)和式(28b)与通常微分的商规则一致. 在经济分析中,经常要在已知 x, y 的随机增长率 $\mathrm{d}x/x$, $\mathrm{d}y/y$ 的条件下求 $\mathrm{d}(y/x)$, 此时使用式(28b)是较方便的. 在4.1节中将有许多这样的机会.

D. 应用举例

Itô公式的多方面的应用后面将陆续看到. 此处所举的几个例子,一方面起

解释作用,同时也提供几个有用的结论,后面将多次引用这些结论.

(i) **计算积分**. 若被积表达式可写成"恰当微分",即表为某个随机微分 $\mathrm{d}x$,则可直接用式(16). 这种情况固然使人乐于应用,但毕竟机会不多. 而应用分部积分式(27)的机会则颇多. 例如,设 $\psi = \alpha t + \beta u$, α,β 为常数,则

$$\int_a^b \mathrm{e}^{\psi(t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\int_a^b \mathrm{e}^{\beta u(t)}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\alpha t}) = \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\psi}\Big|_a^b - \frac{1}{\alpha}\int_a^b \mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\beta u(t)}) \quad (\text{用式(27)})$$

$$= \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\psi}\Big|_a^b - \frac{1}{\alpha}\int_a^b \mathrm{e}^{\psi}\left(\beta\mathrm{d}u + \frac{\beta^2}{2}\sigma_u^2\mathrm{d}t\right), \quad (\text{用式(23a)})$$

由此解出

$$\int_a^b \mathrm{e}^{\psi}\mathrm{d}t = \frac{2}{2\alpha + \beta^2\sigma_u^2}\left(\mathrm{e}^{\psi}\Big|_a^b - \beta\int_a^b \mathrm{e}^{\psi}\mathrm{d}u\right). \tag{29}$$

注意,式(29)右端的积分为Itô积分,而左端为通常积分. 式(29)的好处在于,它有助于计算期望:

$$\mathrm{E}_a\int_a^b \mathrm{e}^{\alpha t+\beta u(t)}\mathrm{d}t = \frac{2}{2\alpha + \beta^2\sigma_u^2}\mathrm{E}_a\left[\mathrm{e}^{\alpha t+\beta u(t)}\Big|_a^b\right] \quad (b \geqslant a). \tag{30}$$

(ii) **计算期望**. 基本思想是:为求 $\mathrm{E}_t x(s)\ (s \geqslant t)$, 用下式

$$\mathrm{E}_t x(s) = \mathrm{E}_t\left[x(t) + \int_t^s \mathrm{d}x(\tau)\right] \quad (\text{用式(16)})$$

$$= x(t) + \mathrm{E}_t\int_t^s (f\mathrm{d}\tau + g\mathrm{d}u) \quad (\text{设 } \mathrm{d}x = f\mathrm{d}t + g\mathrm{d}u)$$

$$= x(t) + \int_t^s \mathrm{E}_t f(\tau)\mathrm{d}\tau. \quad (\text{用式(9)})$$

今用以上方法来计算

$$\varphi(s) \triangleq \mathrm{E}_t\mathrm{e}^{\beta u(s)} \quad (s \geqslant t),$$

其中 t 固定. 由

$$\varphi(s) = \mathrm{e}^{\beta u(t)} + \mathrm{E}_t\int_t^s \mathrm{d}[\mathrm{e}^{\beta u(\tau)}]$$

$$= \mathrm{e}^{\beta u(t)} + \mathrm{E}_t\int_t^s \mathrm{e}^{\beta u(\tau)}\left[\beta\mathrm{d}u(\tau) + \frac{\beta^2\sigma_u^2}{2}\mathrm{d}\tau\right] \quad (\text{用式(23a)})$$

$$= \mathrm{e}^{\beta u(t)} + \frac{\beta^2\sigma_u^2}{2}\int_t^s \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$$

得

$$\dot{\varphi}(s) = \frac{\beta^2\sigma_u^2}{2}\varphi(s), \quad \varphi(t) = \mathrm{e}^{\beta u(t)}.$$

解这个关于 $\varphi(s)$ 的一阶线性微分方程,得

$$\mathrm{E}_t\mathrm{e}^{\beta u(s)} = \exp\left[\frac{\beta^2\sigma_u^2}{2}(s-t) + \beta u(t)\right] \quad (s \geqslant t). \tag{31}$$

特别,取 $t = 0$, 然后改写 s 为 t 得

$$\mathrm{E}_0 \mathrm{e}^{\beta u(t)} = \mathrm{e}^{\beta^2 \sigma_u^2 t/2} \quad (t \geqslant 0). \tag{31$'$}$$

式(31)、式(31)′后面将多次用到.进而可以推出,若 $s \geqslant \tau \geqslant t$,则

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_t \mathrm{e}^{\beta u(s) - \beta u(\tau)} &= \mathrm{E}_t \mathrm{e}^{-\beta u(\tau)} \mathrm{E}_\tau \mathrm{e}^{\beta u(s)} \\ &= \mathrm{E}_t \mathrm{e}^{-\beta u(\tau)} \mathrm{e}^{\beta u(\tau) + \beta^2 \sigma_u^2 (s-\tau)/2}, \quad (\text{用式}(31))\end{aligned}$$

这就得到

$$\mathrm{E}_t \mathrm{e}^{\beta u(s) - \beta u(\tau)} = \mathrm{e}^{\beta^2 \sigma_u^2 (s-\tau)/2} \quad (s \geqslant \tau \geqslant t). \tag{32}$$

其次,结合式(30)与式(31)可最终算出期望:

$$\mathrm{E}_a \int_a^b \mathrm{e}^{\psi(t)} \mathrm{d}t = \frac{2}{2\alpha + \beta^2 \sigma_u^2} \mathrm{e}^{\psi(a)} \left[\mathrm{e}^{(\alpha + \beta^2 \sigma_u^2/2)(b-a)} - 1 \right], \quad \psi(t) = \alpha t + \beta u(t). \tag{30$'$}$$

3.1.4 推广

在经济分析中,应用多维随机函数并对之进行微积分运算,无疑是不可避免的.因此,前述的随机微积分理论,应当有相应的多维推广.总的来说,这一推广是自然而简单的,仅有不多的技术性措施需要稍细致的考虑.因此,下面仅概述最基本的事实,并强调某些关键点.下面的内容所遵循的顺序仍然是(参照3.1.1小节至3.1.3小节):随机函数、随机积分与随机微分.

A. 向量随机函数

一个 n 维向量随机函数

$$\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^{\mathrm{T}}, \tag{33}$$

无非是 n 个随机函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 构成的组,亦称为一个 n 维随机过程.更一般地,还可考虑所谓矩阵随机函数(或矩阵随机过程)

$$\boldsymbol{g}(t) = [g_{ij}(t)]_{n \times p}, \tag{34}$$

它可看作一个 $n \times p$ 维向量随机函数.对于向量随机函数,可施行两类不同性质的运算:通常的向量运算(如线性运算与矩阵运算);施于随机函数的运算(如取期望、方差及求随机积分或微分等).对于后者,通常归于对各分量的相应运算.只是须指出:通常的绝对值 $|x(t)|$ 现在应代以 **Euclid** 范数

$$|\boldsymbol{x}(t)| = \Big(\sum_i |x_i(t)|^2 \Big)^{1/2} \qquad (\boldsymbol{x} \text{ 依式}(33))$$

及

$$|\boldsymbol{g}(t)| = \Big(\sum_{i,j} |g_{ij}(t)|^2 \Big)^{1/2}. \qquad (\boldsymbol{g} \text{ 依式}(34))$$

因 $\sum |g_{ij}|^2 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{g})$,故后者也称为**迹范数**.在 $\mathbf{R}^{n \times p}$ 中总使用迹范数,除非另有说明.

设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是一个 n 维随机函数. $\boldsymbol{x}(t)$ 是扩散过程意味着: $\boldsymbol{x}(t)$ 具有 Markov 性质(其准确描述与一维过程几无区别),且存在向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 与 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) =$

$[g_{ij}(\boldsymbol{x})]$（为简单起见，限于考虑齐次过程，这在应用上是最重要的），分别称为漂移系数与扩散系数，使得 $\forall\ \delta > 0$，当 $0 < t \to 0$ 时对 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 一致地有

$$\int_{|y-x|\geqslant\delta} P(t,\boldsymbol{x},\mathrm{d}\boldsymbol{y}) = o(t),$$

$$\int_{|y-x|<\delta} (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})P(t,\boldsymbol{x},\mathrm{d}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})t + o(t),$$

$$\int_{|y-x|<\delta} (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}P(t,\boldsymbol{x},\mathrm{d}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})t + o(t),$$

其中 $P(t,\boldsymbol{x},B) = P(\boldsymbol{x}(t) \in B|\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x})$ 是转移概率.

若 $u_1,u_2,\cdots,u_p$ 皆为 Brown 运动，则称 $\boldsymbol{u} = (u_1,u_2,\cdots,u_p)^{\mathrm{T}}$ 为一个 p 维 Brown 运动. 约定

$$\mathrm{cov}(\mathrm{d}u_j,\mathrm{d}u_k) = \sigma_{jk}\mathrm{d}t, \quad \boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{jk}]_{p\times p}. \tag{35}$$

当 $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}$（单位矩阵）时称 $\boldsymbol{u}$ 为 p 维标准 Brown 运动. 式(35)可缩写成①

$$\mathrm{Var}(\mathrm{d}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}t. \tag{35$'$}$$

今后凡用到 p 维 Brown 运动 $\boldsymbol{u}$ 时，协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的意义总依式(35).

B. 积分

设 $\boldsymbol{x}(t)$ 与 $\boldsymbol{g}(t)$ 分别依式(33)与式(34). 当涉及关于 $\boldsymbol{x}(t)$ 或 $\boldsymbol{g}(t)$ 的随机积分时，总假定它们的分量满足 3.1.2A 中所述的条件(i)～(iii)，因而对于每个分量随机积分已有定义. 对 $\boldsymbol{x}(t)$ 与 $\boldsymbol{g}(t)$ 的 Itô积分的定义依如下很自然的方式给出：任给 Brown 运动 u，定义

$$\int_a^b \boldsymbol{x}\mathrm{d}u = \left[\int_a^b x_1\mathrm{d}u,\cdots,\int_a^b x_n\mathrm{d}u\right]^{\mathrm{T}}; \tag{36}$$

若 $\boldsymbol{u} = (u_1,u_2,\cdots,u_p)^{\mathrm{T}}$ 是一个 p 维 Brown 运动，则定义

$$\int_a^b \boldsymbol{g}\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \left[\sum_k \int_a^b g_{1k}\mathrm{d}u_k,\cdots,\sum_k \int_a^b g_{nk}\mathrm{d}u_k\right]^{\mathrm{T}}. \tag{37}$$

如此定义的积分 $\int_a^b \boldsymbol{x}\mathrm{d}u$ 与 $\int_a^b \boldsymbol{g}\mathrm{d}\boldsymbol{u}$，均为平方可积的 n 维随机变量.

经推广后的积分仍然具有性质(i)～(iii)(依 3.1.2B)，这是很明显的. 但等距性需要特殊考虑. 设 $\boldsymbol{u}$ 是一个 p 维Brown 运动. 首先，对于一维随机函数 x,y，式(11)可推广为

$$\mathrm{E}\left[\int_a^b x\mathrm{d}u_j\int_a^b y\mathrm{d}u_k\right] = \int_a^b \mathrm{E}[x(t)y(t)]\sigma_{jk}\mathrm{d}t, \tag{38}$$

其中 σ_{jk} 依式(35). 利用以上等式，可算出

$$\mathrm{E}\left|\int_a^b \boldsymbol{g}\mathrm{d}\boldsymbol{u}\right|^2 = \mathrm{E}\sum_i\left(\sum_k\int_a^b g_{ik}\mathrm{d}u_k\right)^2 \qquad \text{（用式(37)）}$$

① 依定义，对任何随机向量 $\boldsymbol{x}$，有 $\mathrm{Var}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{E}[(\boldsymbol{x}-\mathrm{E}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-\mathrm{E}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}]$. 因此，对于 $\mathrm{d}\boldsymbol{u} = (\mathrm{d}u_1,\mathrm{d}u_2,\cdots,\mathrm{d}u_p)^{\mathrm{T}}$，有 $\mathrm{Var}(\mathrm{d}\boldsymbol{u}) = \mathrm{E}[\mathrm{d}\boldsymbol{u}(\mathrm{d}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}t$.

$$= \sum_{i,j,k} \mathrm{E}\left[\int_a^b g_{ij} \mathrm{d}u_j \int_a^b g_{ik} \mathrm{d}u_k\right]$$

$$= \sum_{i,j,k} \int_a^b \mathrm{E}(g_{ij} g_{ik}) \sigma_{jk} \mathrm{d}t, \qquad (\text{用式}(38))$$

这就得到

$$\mathrm{E}\left|\int_a^b \boldsymbol{g} \mathrm{d}\boldsymbol{u}\right|^2 = \int_a^b \mathrm{E}[\mathrm{tr}(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{g} \boldsymbol{\Sigma})] \mathrm{d}t, \tag{39}$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 依式(35). 若 $\boldsymbol{u}$ 为 p 维标准Brown 运动,则 $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}$, 于是

$$\mathrm{E}\left|\int_a^b \boldsymbol{g}(t) \mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)\right|^2 = \int_a^b \mathrm{E}|\boldsymbol{g}(t)|^2 \mathrm{d}t, \tag{40}$$

其中 $|\boldsymbol{g}(t)|$ 为迹范数. 式(40)与式(10)在形式上已无区别.

C. 微分

设 $\boldsymbol{f}(t) = [f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)]^{\mathrm{T}}$ 是一个 n 维随机函数, $\boldsymbol{g}(t)$ 依式(34), $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_p)^{\mathrm{T}}$ 是一个 p 维Brown 运动,则

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(a) + \int_a^t [\boldsymbol{f}(s) \mathrm{d}s + \boldsymbol{g}(s) \mathrm{d}\boldsymbol{u}(s)] \quad (t \geqslant a). \tag{41}$$

形式上,积分表示式(41)与式(15)毫无区别,不同的只是维数而已. 这就自然约定

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}(t) \mathrm{d}t + \boldsymbol{g}(t) \mathrm{d}\boldsymbol{u}(t), \tag{41$'$}$$

并称 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)$ 为 n 维随机函数 $\boldsymbol{x}(t)$ 的 Itô微分. 设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$. 显然,式(41)$'$等价于

$$\mathrm{d}x_i = f_i \mathrm{d}t + \sum_k g_{ik} \mathrm{d}u_k \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

对于一维 Itô微分所作的解释,无需任何改动即可移用于 n 维 Itô微分;仍可使用形如式(16)的公式. 这些都不再细述.

唯一值得稍作说明的是Itô公式. 设 $F(t, \boldsymbol{x}) = F(t, x_1, \cdots, x_n)$, 其中 $\boldsymbol{x}(t)$ 依式(41). Itô公式(19)现在推广为

$$\mathrm{d}F(t, \boldsymbol{x}) = F_t \mathrm{d}t + F_x \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2} (\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} F_{xx} \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{42}$$

其中 $F_x = \nabla_x F, F_{xx} = \nabla_x^2 F$, $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 依式(41)$'$. 如同式(19)一样,关键是如何解释式(42)中的二阶项. 详细写出

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} F_{xx} \mathrm{d}\boldsymbol{x} &= (\mathrm{d}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} F_{xx} \boldsymbol{g} \mathrm{d}\boldsymbol{u} \qquad (\text{用式}(41)') \\
&= \mathrm{tr}[(\mathrm{d}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} F_{xx} \boldsymbol{g} \mathrm{d}\boldsymbol{u}] \\
&= \mathrm{tr}[\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} F_{xx} \boldsymbol{g} \mathrm{d}\boldsymbol{u} (\mathrm{d}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}] \\
&= \mathrm{tr}(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} F_{xx} \boldsymbol{g} \boldsymbol{\Sigma}) \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 依式(35). 以上演算中用到乘法表(20)的如下推广:

$$(\mathrm{d}t)^2 = \mathrm{d}t \mathrm{d}u_j = 0, \quad \mathrm{d}u_j \mathrm{d}u_k = \sigma_{jk} \mathrm{d}t \quad (1 \leqslant j, k \leqslant p), \tag{43}$$

其中后一式可缩写成 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}(\mathrm{d}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Sigma} \mathrm{d}t$. 这样,可将 Itô公式(42)改写成:

$$\mathrm{d}F(t,\boldsymbol{x}) = F_t\mathrm{d}t + F_x\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}F_{xx}\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Sigma})\mathrm{d}t$$

$$= \left[F_t + F_x\boldsymbol{f} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}F_{xx}\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Sigma})\right]\mathrm{d}t + F_x\boldsymbol{g}\mathrm{d}\boldsymbol{u}. \tag{42)'$$

若$\boldsymbol{u}$为p维标准Brown运动,则式(42)′简化为

$$\mathrm{d}F(t,\boldsymbol{x}) = F_t\mathrm{d}t + F_x\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(F_{xx}\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}})\mathrm{d}t. \tag{42)''$$

实际运用时,仍然以使用由式(21)表达的规则(结合用乘法表(43))为好,而不必死记式(42)′或式(42)″.

式(42)′表明,$\mathrm{d}F$由两部分组成:"确定性部分"$(\cdots)\mathrm{d}t$与随机扰动部分$F_x\boldsymbol{g}\mathrm{d}\boldsymbol{u}$;这两部分的性质与作用很不相同,在随机微分的运用中应注意仔细区别.为突出确定性部分的作用,引入记号

$$LF = LF(t,\boldsymbol{x}) \triangleq \mathrm{E}[\mathrm{d}F(t,\boldsymbol{x})/\mathrm{d}t],$$

并称LF为函数$F(t,\boldsymbol{x})$的**期望变化率**.由式(42)′,有

$$LF = F_t + F_x\boldsymbol{f} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}F_{xx}\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Sigma}). \tag{44}$$

而式(42)′可以改写成

$$\mathrm{d}F(t,\boldsymbol{x}) = LF(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}t + F_x\boldsymbol{g}\mathrm{d}\boldsymbol{u}.$$

为更清晰地解释式(44)的具体用法,考虑本书中最常用的两种特殊情况,首先设

$$F = F(t,x), \quad \mathrm{d}x = f\mathrm{d}t + g\mathrm{d}u,$$

则直接依式(44)有

$$LF = F_t + F_xf + \frac{1}{2}\sigma_u^2g^2F_{xx}. \tag{45}$$

其次设

$$F = F(t,x,y), \quad \mathrm{d}x = f\mathrm{d}t + g\mathrm{d}u, \quad \mathrm{d}y = \varphi\mathrm{d}t + \psi\mathrm{d}v,$$

则分别以

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f \\ \varphi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & \psi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{uv} \\ \sigma_{uv} & \sigma_v^2 \end{bmatrix}$$

代替式(44)中的$\boldsymbol{x},\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},F_{xx}$与$\boldsymbol{\Sigma}$,得到

$$LF = F_t + F_xf + F_y\varphi + \frac{1}{2}(\sigma_u^2g^2F_{xx} + 2\sigma_{uv}g\psi F_{xy} + \sigma_v^2\psi^2F_{yy}). \tag{46}$$

实际运用时,并不必死记公式(46),只需写出通常的到二阶项为止的Taylor展开式:

$$\mathrm{d}F = F_t\mathrm{d}t + F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + \frac{1}{2}[F_{xx}(\mathrm{d}x)^2 + 2F_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + F_{yy}(\mathrm{d}y)^2];$$

然后以$\mathrm{d}x = f\mathrm{d}t + g\mathrm{d}u$与$\mathrm{d}y = \varphi\mathrm{d}t + \psi\mathrm{d}v$代入,并用乘法表(43)化简,整理成

$dF = LF dt + \cdots$，则所得的 LF 必具有式(46)的形式.

参 考 文 献

[1] Blenman L P, et al. An alternative approach to stochastic calculus for economic and financial models[J]. J. Eco. Dyn. Control, 1995, 19:553-568.
[2] 黄志远. 随机分析基础[M]. 第2版. 北京:科学出版社,2001
[3] Itô K. Stochastic integral[C]. Proc. Imperial Academy Tokyo, 1944, 20:519-524.
[4] Itô K. On a formula concerning stochastic differential[J]. Nagoya Math. J., 1951,3:55-65.
[5] Malliaris A G, Brock W A. Stochastic Methods in Economics and Finance[M]. Amsterdam: North-Holland, 1982.
[6] 潘介人. 经济领域中的随机过程[M]. 上海:上海交通大学出版社,1999.
[7] Ross S M. Stochastic Processes[M]. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons Inc., 1996.
[8] Stokey N L, Lucas R E. Recursive Methods in Economic Dynamics[M]. Boston: Harvard Univ. Press, 1989.
[9] Turnovsky S J. Methods of Macroeconomic Dynamics[M]. Cambridge: MIT Press, 1995.
[10] 熊大国. 随机过程理论与应用[M]. 北京:国防工业出版社,1991.
[11] 严加安,等. 随机分析选讲[M]. 北京:科学出版社,1997.
[12] 袁震东. 近代概率引论[M]. 北京:科学出版社,1991.

3.2 随机微分方程

通常的微分方程(ODE)的一般形式是

$$dx(t) = f(t, x(t))dt, \tag{1}$$

或简写为 $dx = f(t,x)dt$，其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 是未知的 n 维向量函数，函数 $f(t,x): J \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 表达了 $x(t)$ 的变化率，J 是某个区间. 方程(1)用于描述随时间展开的确定性系统. 然而，经济系统通常具有不确定性，而不确定性因素往往源于对一确定性系统的**随机扰动**(或随机干扰、随机冲击，这些都看作同义语)，描述这种扰动的最简单而自然的方式是在系统(1)的右端附加**扰动项**，将

微分方程(1)推广为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t))\mathrm{d}t+\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}(t))\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t), \tag{2}$$

或简写作 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}t+\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{u}$，其中 $\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}):J\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{n\times p}$ 是一个矩阵值函数，$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_p)^{\mathrm{T}}$ 是一个 p 维 Brown 运动. 方程(2)就是本节所要考虑的随机微分方程(SDE)，其中 $\boldsymbol{x}(t)$ 是未知的 n 维随机函数，$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t))$ 表达了 $\boldsymbol{x}(t)$ 的某种平均变化率，而扰动项 $\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ 则表达了系统的方差，后者反映了系统面对的风险. 这种兼顾均值与方差的数学工具，对于宏观经济分析的意义甚大；一些主要的宏观经济变量的动态行为与相互关系，正适于用SDE 来描述. 用形如式(2)的 SDE 刻画经济系统的方法，正可看作经济分析中已成为标准工具的**均值-方差方法**的一种形式. 实际运用表明，这种方法是非常有效的.

由于扰动项 $\boldsymbol{g}\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ 的存在，方程(1)与方程(2)的解的性质差别甚大. 不过，对于SDE 的研究，ODE 理论仍然不失为一个有益的参照. 实际上，SDE 理论的相当一部分概念、结论、公式与方法，正是从ODE 理论的标准内容自然地推广或引申过来的. 作为一种初步理解，不妨说SDE 理论是ODE 理论与随机过程(或随机分析)理论的某种综合.

对本书而言，SDE 仅仅是一个辅助工具，本节并不涉及SDE 理论的深入内容，只是概括地介绍本书中不可避免地要用到的那部分 SDE 知识. 还需指出，此处所介绍的SDE 限于使用Itô微分的SDE(也称为Itô SDE)[①]，它只是可供选择的多种SDE 中的一种. 不过，Itô方程毕竟是目前最流行的，它的多方面的好处使之具有公认的优势.

3.2.1 线性方程

方程右端线性地依赖于未知函数的SDE 称为**线性 SDE**. 如同线性ODE 一样，线性SDE 的解具有清晰的结构，且可表为某个通解公式，因而无论从理论分析或从实际计算看来都具有明显的优势. 与ODE 相比，对于一般SDE 的求解更加缺少实际可行的方法，因而线性SDE 的作用更为突出. 因此，在本节中将线性SDE 置于首位是很自然的. 在经济分析中，凡不免涉及SDE 时，我们将总是尽可能使用线性SDE.

A. 一般情形

如所熟知，线性ODE 的一般形式是

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}(t), \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{A}(t)$ 是已知的 $n\times n$ 阶矩阵值函数，$\boldsymbol{y}(t)$ 是已知的 n 维向量函数. 若式(3)

---

① Itô很早(1946)就运用他所创立的随机积分研究SDE. 但SDE 理论粗具规模且开始进入广泛的应用，却是在俄罗斯学派20 世纪60 年代的系列工作之后.

加上一个线性的随机扰动，就得到如下线性SDE：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}(t)]\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{p}[\boldsymbol{G}_k(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_k(t)]\mathrm{d}u_k. \tag{4}$$

为明确起见，以下设 $\boldsymbol{A}(\cdot),\boldsymbol{G}_k(\cdot) \in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}^{n\times n})$，$\boldsymbol{y}(t)$ 与 $\boldsymbol{b}_k(t)$ 是 n 维随机函数，满足定义Itô积分时所要求的那些条件(参考3.1.2A)，$1 \leqslant k \leqslant p$，$\boldsymbol{u} = (u_1,u_2,\cdots,u_p)^{\mathrm{T}}$ 是 p 维Brown 运动，$\mathrm{Var}(\mathrm{d}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}t$，$\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{jk}]_{p\times p}$ (参考3.1 节式(35))．$\boldsymbol{A},\boldsymbol{G}_k,\boldsymbol{y},\boldsymbol{b}_k,\boldsymbol{u}$ 都是给定的，而 $\boldsymbol{x}$ 则是未知的 n 维随机函数．

关于SDE(4)的结论是从有关方程(3)的相应结论推广过来的．首先，方程(4)密切联系齐次线性矩阵方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{\Phi} = \left[\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t + \sum_k \boldsymbol{G}_k(t)\mathrm{d}u_k\right]\boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{\Phi}(t_0) = \boldsymbol{I} \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(t)$ 是未知的 $n\times n$ 阶矩阵随机函数，$t_0 \geqslant 0$ 是取定的初始时点．利用关于SDE 的基本存在定理(参考3.2.2A)可以推出，问题(5)存在唯一解 $\boldsymbol{\Phi}(t)$，它称为线性SDE(4)的**基本矩阵**．可以证明 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是a.s.可逆的，这一事实对于用 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 构成方程(4)的通解是关键的．若令 $\boldsymbol{G}_k(t) \equiv \boldsymbol{0}(1 \leqslant k \leqslant p)$，则问题(5)退化为通常的矩阵方程

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}, \quad \boldsymbol{\Phi}(t_0) = \boldsymbol{I}. \tag{5$'$}$$

如所熟知，方程(5)′的解正是方程(3)的基本矩阵．

为得出方程(4)的通解，首先注意方程(3)的通解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\left[\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s\right],$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}$ 依方程(5)′．方程(4)的通解公式是上式的一个推广：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) = &\boldsymbol{\Phi}(t)\left\{\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\left[\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s \right.\right. \\ &\left.\left. - \sum_{j,k}\boldsymbol{G}_j(s)\boldsymbol{b}_k(s)\sigma_{jk}\mathrm{d}s + \sum_k \boldsymbol{b}_k(s)\mathrm{d}u_k\right]\right\} \quad (t \geqslant t_0), \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 依方程(5)．利用Itô公式经直接计算可以验证，由式(6)表示的 $\boldsymbol{x}(t)$ 确满足方程(4)．在式(6)中令 $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{b}_k(t) \equiv \boldsymbol{0}(1 \leqslant k \leqslant p)$ 得出，齐次线性SDE

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}\mathrm{d}t + \sum_k \boldsymbol{G}_k(t)\boldsymbol{x}\mathrm{d}u_k \tag{4$'$}$$

有形式上很简单的通解公式：

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(t_0) \quad (t \geqslant t_0). \tag{7}$$

求得通解公式固然是一件有意义的事，但对于式(6)的实际使用不应抱太大的希望．首先，求出基本矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的机会甚少，即使对于较简单的线性ODE(3)尚且如此，更不必说对线性SDE(4)了．况且，就算已求得 $\boldsymbol{\Phi}(t)$，将式(6)用于解

的计算或估计也远不是简单的事,除非能对式(6)作大幅度化简.

B. 特殊情形

鉴于通解公式式(6)在一般情况下几乎无法实际应用,自然关注那些使式(6)有所简化的特殊情形,正是这些特殊情形在应用中颇为常见.除了已提到的齐次线性SDE(4)′之外,主要的特殊情形是:狭义线性方程;自治线性方程;一维线性方程.下面主要介绍狭义线性方程和自治线性方程.3.2.1C将会专门介绍一维线性方程.

(i) **狭义线性方程**,其一般形式为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}(t)]\mathrm{d}t + \sum_k \boldsymbol{b}_k(t)\mathrm{d}u_k, \tag{8}$$

这相当于在式(4)中取 $\boldsymbol{G}_k(t) \equiv \boldsymbol{0}(1 \leqslant k \leqslant p)$; 直观上,这意味着扰动独立于 $\boldsymbol{x}$.这种情况在经济系统中固属特殊,但确有发生.

方程(8)的特别令人感兴趣之处在于,对于它可完全套用线性ODE(3)的通解公式.首先,方程(4)的基本矩阵就是方程(3)的基本矩阵,即矩阵方程(5)′的解 $\boldsymbol{\Phi}(t)$, 它完全是确定性的! 其次,将方程(8)改写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}\mathrm{d}t + \mathrm{d}\boldsymbol{v}, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y}(t)\mathrm{d}t + \sum_k \boldsymbol{b}_k(t)\mathrm{d}u_k, \tag{8$'$}$$

尽管 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ 含有随机扰动,但不妨置这一事实于不顾,将它当作一个如同 $\boldsymbol{y}\mathrm{d}t$ 一般的项,因而可仿照方程(3)的通解公式得出方程(8)′的通解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t)\left[\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\mathrm{d}\boldsymbol{v}(s)\right] \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t)\left\{\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\left[\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s + \sum_k \boldsymbol{b}_k(s)\mathrm{d}u_k\right]\right\} \quad (t \geqslant t_0).\end{aligned} \tag{9}$$

注意在通解公式式(6)中取 $\boldsymbol{G}_k(t) \equiv \boldsymbol{0}(1 \leqslant k \leqslant p)$ 同样得出式(9).

因 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是确定性的,故直接从式(9)得到

$$\mathrm{E}_t\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{\Phi}(s)\left[\boldsymbol{x}(t) + \int_t^s \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\tau)\mathrm{E}_t\boldsymbol{y}(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \quad (s \geqslant t). \tag{10}$$

(ii) **自治线性方程**,其一般形式为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = [\mathbf{A}x + \boldsymbol{y}(t)]\mathrm{d}t + \sum_k [\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_k(t)]\mathrm{d}u_k, \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{G}_k \in \mathbf{R}^{n\times n}(1 \leqslant k \leqslant p)$. 注意,式(11)中 $\boldsymbol{y}(t)$ 与 $\boldsymbol{b}_k(t)$ 仍然依赖于 t, 故式(11)未必为严格意义上的自治系统.

自治线性方程(11)的优势在于,因矩阵方程(依据式(5))

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi} = \left(\mathbf{A}\mathrm{d}t + \sum_k G_k\mathrm{d}u_k\right)\boldsymbol{\Phi}, \quad \boldsymbol{\Phi}(t_0) = \boldsymbol{I} \tag{12}$$

是自治方程,由它求出基本矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的机会显著增加.例如,若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{G}_1,\cdots,\boldsymbol{G}_p$ 两两可交换,则方程(12)的解是

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp\left\{\left(\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\sum_{j,k}\boldsymbol{G}_j\boldsymbol{G}_k\sigma_{jk}\right)(t-t_0)+\sum_k\boldsymbol{G}_k[u_k(t)-u_k(t_0)]\right\}. \quad (13)$$

利用Itô公式，不难验证由式(13)表示的 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 确满足方程(12). 若 $\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_p)^{\mathrm{T}}$ 为 p 维标准Brown 运动，则式(13)简化为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp\left\{\left(\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\sum_k\boldsymbol{G}_k^2\right)(t-t_0)+\sum_k\boldsymbol{G}_k[u_k(t)-u_k(t_0)]\right\}. \quad (14)$$

另一方面，若设 $\boldsymbol{G}_k=\boldsymbol{0}(1\leqslant k\leqslant p)$，则式(13)简化为 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}$，且此时方程(11)为狭义线性方程，于是可用公式(9)写出其通解：

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^t\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)}\left[\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s+\sum_k\boldsymbol{b}_k(s)\mathrm{d}u_k(s)\right]\quad(t\geqslant t_0). \quad (15)$$

当然，在式(13)适用的情况下，以式(13)代入式(6)亦得出方程(11)的通解公式. 但这样的公式过长，不便写出，今后也不用它.

C. 一维线性方程

在 $n=1$ 的情况下，方程(4)可改写成

$$\mathrm{d}x=[a(t)x+y(t)]\mathrm{d}t+\sum_k[g_k(t)x+b_k(t)]\mathrm{d}u_k, \quad (16)$$

其中 $a(t),g_k(t)$ 是已知的普通连续函数，$y(t),b_k(t)$ 是已知的随机函数，$1\leqslant k\leqslant p$. 形如式(16)的方程正是本书用得最多的SDE，因而值得重点考虑.

一维线性方程(16)的优势在于，从方程(依据式(5))

$$\mathrm{d}\Phi=\Phi\left[a(t)\mathrm{d}t+\sum_k g_k(t)\mathrm{d}u_k\right],\quad \Phi(t_0)=1 \quad (17)$$

总能求出基本解

$$\Phi(t)=\exp\left\{\int_{t_0}^t\left[a(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\sum_{j,k}g_j(s)g_k(s)\sigma_{jk}\mathrm{d}s+\sum_k g_k(s)\mathrm{d}u_k(s)\right]\right\}. \quad (18)$$

事实上，将式(18)写作 $\Phi(t)=e^{\varphi(t)}$，则用3.1 节中公式(23a)不难直接验证 $\Phi(t)$ 满足方程(17). 一旦求得 $\Phi(t)$，只需将式(18)代入式(6)，即得出方程(16)的通解公式. 但这样的公式仍然过长而不便应用. 于是，我们又需要进一步考虑更特殊的情况，以使通解公式简化到足以便于实际运用.

(i) **齐次方程**，其一般形式为

$$\mathrm{d}x=x[a(t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}v],\quad \mathrm{d}v=\sum_k g_k(t)\mathrm{d}u_k, \quad (19)$$

这相当于在方程(16)中取 $y(t)=b_k(t)\equiv 0(1\leqslant k\leqslant p)$. 依式(7)，方程(19)的通解为 $x(t)=\Phi(t)x(t_0)$，$\Phi(t)$ 依式(18)；详细写出来就是

$$x(t)=x(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^t\left[\left(a(s)-\frac{1}{2}\sigma_v^2\right)\mathrm{d}s+\mathrm{d}v(s)\right]\right\}\quad(t\geqslant t_0), \quad (20)$$

其中 $\sigma_v^2=\sum_{j,k}g_jg_k\sigma_{jk}$. 注意 σ_v^2 与 t 有关，$\mathrm{d}v$ 并非通常意义下的Brown 运动. 若 $a,g_k(1\leqslant k\leqslant p)$ 为常数，则式(20)简化为

$$x(t) = x(t_0)\mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)+v(t)-v(t_0)}, \quad \alpha = a - \frac{1}{2}\sigma_v^2. \tag{20'}$$

这样的 $x(t)$ 称为几何 Brown 运动，常数

$$a = x^{-1}\mathrm{E}[\mathrm{d}x/\mathrm{d}t]$$

称为 x 的平均增长率或期望增长率.处于均衡状态下的经济变量通常具有几何 Brown 运动的特征.

(ii) 狭义线性方程，其一般形式为

$$\mathrm{d}x = [a(t)x + y(t)]\mathrm{d}t + \sum_k b_k(t)\mathrm{d}u_k, \tag{21}$$

这相当于在方程(16)中取 $g_k(t) \equiv 0 (1 \leqslant k \leqslant p)$. 因依公式(18)有 $\Phi(t) = \mathrm{e}^{A(t)}$, $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s$, 故直接用式(9)得出方程(21)的通解为

$$x(t) = x(t_0)\mathrm{e}^{A(t)} + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{A(t)-A(s)}\Big[y(s)\mathrm{d}s + \sum_k b_k(s)\mathrm{d}u_k(s)\Big] \quad (t \geqslant t_0). \tag{22}$$

利用式(22)推出以下两条件等价：

$$x(t) = -\int_t^\infty \mathrm{e}^{-A(s)}\mathrm{E}_t y(s)\mathrm{d}s,$$

$$\lim_{s\to\infty}\mathrm{E}_t[x(s)\mathrm{e}^{-A(s)}] = 0.$$

如上的等价性在经济分析中有重要应用(例如参看 4.2 节式$(2)_t$、式$(3)_t$).

(iii) 只有一个干扰源的线性方程，可写成

$$\mathrm{d}x = [a(t)x + y(t)]\mathrm{d}t + [g(t)x + b(t)]\mathrm{d}u, \tag{23}$$

这相当在方程(16)中取 $p = 1, g_1 = g, b_1 = b, u_1 = u$. 对于方程(23)，依式(18)有

$$\Phi(t) = \mathrm{e}^{\varphi(t)}, \quad \varphi(t) = \int_{t_0}^t \Big[a(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\sigma_u^2 g^2(s)\mathrm{d}s + g(s)\mathrm{d}u(s)\Big],$$

然后用式(6)得出方程(23)的通解如下：

$$x(t) = x(t_0)\mathrm{e}^{\varphi(t)} + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{\varphi(t)-\varphi(s)}[y(s)\mathrm{d}s - b(s)g(s)\sigma_u^2\mathrm{d}s + b(s)\mathrm{d}u(s)] \quad (t \geqslant t_0). \tag{24}$$

D. 增长率与回报率

重新考虑方程(19)：

$$\mathrm{d}x = x(a\mathrm{d}t + \mathrm{d}v), \tag{19}$$

其中 $a = a(t)$ 是时变的或为常数，$\mathrm{d}v$ 是一组 Brown 运动的变系数线性组合，或其本身就是一个 Brown 运动.在将形如式(19)的方程应用于经济分析时，最重要的事情常常不是从其解出变量 x，而是直接从方程得出有关 x 的某些结论，或者将其用于其他依赖于 x 的变量的研究.可以说，对于所考虑的变量 x 只要能写

出形如式(19)的方程，x 的变化特征就已十分了然．为了使这一点更为明确，下面给出某些在经济分析中业已流行的术语与记号．方程(19)可改写成

$$\frac{dx}{x}=adt+dv,\quad a=\frac{E[dx/dt]}{x}.$$

dx/x 与 a 通常分别称为变量 x 的**随机增长率与期望增长率**．只要给定了方程(19)，我们即可断言：平均地说，x 依增长率 a 增长，只是这一增长受到一个随机干扰 dv，扰动的强度取决于 σ_v^2．换一种说法就是：x 的增长具有常规的或可预期的增长率 a，此外附加一个非常规的、不可预期的随机冲击 dv．若 $dv=0(\Leftrightarrow\sigma_v^2=0)$，则 a 就是通常的增长率 $g_x=\dot{x}/x$，而 $dx=g_x dt$．为了与上述解释相适应，在本书中系统地使用一套更具标志性的记号：

$$\psi_x=a=\frac{E[dx/x]}{dt},\quad du_x=dv,$$

因而方程(19)可标准地写成

$$dx=x(\psi_x dt+du_x). \tag{19$'$}$$

今后只要写出形如式(19)′的方程，就意味着 ψ_x 与 du_x 分别为 x 的期望增长率与随机冲击，而不必再作说明．适当地运用以上解释及与之相应的记号，可使形如式(19)的方程能用来更有力地表达经济变量．

有趣的是，对于随机增长率有一些很方便的形式运算规则．下面设

$$dy=y(\psi_y dt+du_y),$$

而 dx 仍依方程(19)′．则依Itô公式有

$$\frac{d(xy)}{xy}=\frac{1}{xy}(ydx+xdy+dxdy)\qquad(\text{用 3.1 节式(26)})$$

$$=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}\frac{dy}{y}$$

$$=(\psi_x+\psi_y+\sigma_{xy})dt+du_x+du_y,\quad(\text{用 3.1 节式(43)})$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right)\Big/\frac{x}{y}=\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)\left(1-\frac{dy}{y}\right)\qquad(\text{用 3.1 节式(28)})$$

$$=\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}\frac{dy}{y}+\left(\frac{dy}{y}\right)^2$$

$$=(\psi_x-\psi_y-\sigma_{xy}+\sigma_y^2)dt+du_x-du_y.$$

这就得到以下公式：

$$\begin{cases}\psi_{xy}=\psi_x+\psi_y+\sigma_{xy},\quad du_{xy}=du_x+du_y & (25a)\\ \psi_{x/y}=\psi_x-\psi_y-\sigma_{xy}+\sigma_y^2,\quad du_{x/y}=du_x-du_y & (25b)\end{cases}$$

这正好推广了确定性条件下增长率的加法公式：

$$g_{xy}=g_x+g_y,\quad g_{x/y}=g_x-g_y.$$

公式(25)很容易记住，因而非常便于应用．值得注意的是，随机扰动服从十分简

单的迭加规则：$du_{xy} = du_x + du_y$；而确定性部分却不能误认为

$$\psi_{xy} = \psi_x + \psi_y, \quad \psi_{x/y} = \psi_x - \psi_y.$$

在经济分析中，方程(19)常用来表达随机环境下资产的增值. 设 x 表示个体持有的某种资产的存量，在不额外注入增加值的条件下，x 依据方程(19)自然增值，则将 dx/x 与 ψ_x 分别称为对资产 x 的**随机回报率与期望回报率**(或期望利率)，且分别记作 dR_x 与 r_x. 在这种情况下，方程(19)可改写成

$$dR_x = r_x dt + du_x.$$

直观上，以上方程表示，在时段 $[t, t+dt]$ 内从资产 x 获得的回报为 $x dR_x$，它被分解为平均回报 $r_x x dt$ 与扰动 $x du_x$ 两部分.

3.2.2 一般理论

在宏观经济分析中，一旦需要用到SDE，我们当然尽可能使用线性SDE；对于这类方程已经有某些有效的处理方法，这从3.2.1小节中可获得初步印象. 然而，完全避免非线性SDE却不可能. 从本质上说，经济系统必然是非线性的. 用线性系统去逼近一个非线性系统，所引起的误差可能超出问题所容许的界限. 对于非线性SDE，因一般不可能求得其显式解，故通常只能在不求出解的情况下对其作某些定性分析，这自然需要用到较深入的分析与概率工具，而这都不是此处所宜充分展开的. 下面仅考虑两个最基本的问题：SDE的解是否存在且具有唯一性？当SDE的解存在时，它作为一个随机过程有哪些最基本的性质？

A. 存在定理

首先解答SDE(2)的解的存在性问题. 对于ODE(1)来说，如所熟知，f 满足一定的Lipschitz条件能保证其初值问题存在唯一解. 可庆幸的是，对于SDE(2)亦可建立类似的结论.

定理 设 $J = [t_0, b] \subset \mathbf{R}_+$，$f, g_k \in C(J \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$，$g = (g_1, g_2, \cdots, g_p)$. 若 f 与 g_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ 满足以下条件：

$$|f(t,x) - f(t,y)| + |g_k(t,x) - g_k(t,y)| \leqslant \text{const} \cdot |x - y|, \tag{26a}$$

$$|f(t,x)| + |g_k(t,x)| \leqslant \text{const} \cdot (1 + |x|), \tag{26b}$$

则对任何平方可积的 n 维随机变量 x_0，方程(2)存在唯一解 $x(t)$ 满足 $x(t_0) = x_0$；$x(t)$ 是 J 上的 n 维随机函数，它满足3.1.2A中所述的条件(i)～(iii).

条件(26a)与条件(26b)分别称为**Lipschitz条件与线性增长条件**，这些条件一般来说是很强的. 例如，$f = |x|^2$ 这样简单的函数既不满足Lipschitz条件，也不满足线性增长条件. 幸而可以证明，定理的条件能适当放宽：只要能局部地满足就够了，甚至可代之以更宽的条件. 对于线性方程(4)来说，Lipschitz条件平凡地满足；若 $y(t)$ 与 $b_k(t)$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ 是通常的连续函数，则线性增长条件亦能满足. 在这种情况下，方程(4)的解的存在唯一性自然不成问题.

在本书中，存在定理的作用只是给基于SDE 的方法的合理性提供一个一般的逻辑保证，并不存在具体应用存在定理的问题. 凡涉及SDE 的地方，我们总是假定某组类似于式(26)的条件已经满足，从而所用SDE 的解总是唯一地存在的. 在任何情况下，我们都避开具体验证存在定理之条件的问题.

B. 解的性质

SDE(2)的解的性质，可分为以下两类.

(i) **分析性质**，例如解 $x(t)$ 的均方连续性、轨道连续性、解对参数的连续依赖性等等；均方连续性已由存在定理所肯定. 涉及这类性质的结论与论证都是很接近于ODE 理论中的相应内容的.

(ii) **统计性质**，这是SDE 所独有的，因而更值得重视. 基本的结论是：SDE 的解 $x(t)$ 是一个扩散过程，$f(t,x)$ 与 $g(t,x)g(t,x)^{\mathrm{T}}$ 分别为其漂移系数与扩散系数(此处设 u 为标准Brown 运动). 直观上，设想 $x(t)$ 描述了某个 $\mathbf{R}^n$ 中的随机运动，该运动的统计规律取决于初始条件，系统的历史无后效性；$f(t,x(t))$ 表达了平均运动速度，而 $g(t,x)g(t,x)^{\mathrm{T}}$ 则描述了位移方差. 位移方差源于随机扰动 $g(t,x)\mathrm{d}u$；若 $g(t,x)\equiv 0$，即扰动消失，则位移方差亦消失，运动具有确定轨道. 若SDE(2)是自治的(这意味着f 与g 均不显含 t)，则其解 $x(t)$ 为齐次扩散过程. 在宏观经济分析中，通常考虑在某种平稳状态下诸宏观经济变量的行为，在这种情况下系统一般服从某个自治SDE. 因此，齐次扩散过程自然地出现于宏观经济分析中.

3.2.3　稳定性

无论是ODE 还是SDE，稳定性都是重大课题，且已形成系统的理论与方法. 就本书的需要而言，稳定性的意义在于：用SDE 描述的宏观经济系统的长期趋势如何，常常是经济分析要回答的首要问题. 这一问题的解答自然地联系到所用到的SDE 的稳定性分析.

A. 稳定性概念

为简便起见，同时也考虑到本书的实际需要，下面仅考虑自治SDE 的稳定性问题. 给定一个自治的SDE 系统

$$\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}t + g(x)\mathrm{d}u, \tag{27}$$

其中 $f: D\to\mathbf{R}^n, g: D\to\mathbf{R}^{n\times p}, D\subset\mathbf{R}^n$ 是一给定区域；$u=(u_1,u_2,\cdots,u_p)^{\mathrm{T}}$ 是给定的 p 维Brown 运动，$\mathrm{Var}(\mathrm{d}u)=\Sigma\mathrm{d}t$. 假定对任给 $x_0\in D$，方程(27)存在唯一定义于 $\mathbf{R}_+$ 上的解 $x(t)$，使得 $x(0)=x_0$；下面将这个解记为 $x(t,x_0)$. 若 $x^*\in D$ 使得 $f(x^*)=\mathbf{0}, g(x^*)=\mathbf{0}$，则 $x(t)\equiv x^*$ 显然满足方程(27)，因而 $x(t,x^*)\equiv x^*$. 这样的 x^* 称为方程(27)的**奇点**或**均衡点**，它表示发展过程的一个相对静止状态. 稳定性理论要解答的一个基本问题就是：若 x^* 是一个均衡点，$x^*\neq x_0\in$

D，则当 $t \to \infty$ 时 $x(t,x_0)$ 是否依某种意义收敛于 x^*？这一问题引出一连串的概念，下面对 $x^* = 0$ 的情况表述这些概念，显然这无损于一般性.

下面设方程(27)具有零解，即 $f(0)=0, g(0)=0$. 约定 $B_\delta = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < \delta\}$. 若 $\forall\ \varepsilon > 0, \forall\ \eta > 0, \exists\ \delta > 0$，使得

$$P(|x(t,x_0)| < \varepsilon, \forall\ t \geqslant 0) \geqslant 1 - \eta \quad (\forall\ x_0 \in B_\delta), \tag{28}$$

则说方程(27)的零解是**随机稳定的**. 若方程(27)的零解随机稳定，且 $\forall\ \eta \in (0,1), \exists\ \delta_0 > 0$，使得

$$P(\lim_{t\to\infty} x(t,x_0) = 0) \geqslant 1 - \eta \quad (\forall\ x_0 \in B_{\delta_0}), \tag{29}$$

则说方程(27)的零解是**随机渐近稳定的**. 若

$$P(\lim_{t\to\infty} x(t,x_0) = 0) = 1 \quad (\forall\ x_0 \in D), \tag{30}$$

则说方程(27)的零解在 D 上**全局随机渐近稳定**. 若

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|x(t,x_0)|}{t} < 0, \text{a.s.} \quad (x_0 \in D), \tag{31}$$

则说方程(27)的零解在 D 上**a.s. 指数稳定**. 与此相反，若

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|x(t,x_0)|}{t} > 0, \text{a.s.} \quad (0 \neq x_0 \in D), \tag{32}$$

则说方程(27)的零解在 D 上**a.s. 指数不稳定**. 此外，还有类似于a.s. 指数稳定的矩指数稳定性等，不一一列举.

本书主要用到a.s. 指数稳定性，值得对其作进一步的说明. 令

$$\beta_1 = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln|x(t,x_0)| \quad (x_0 \in D),$$

β_1 一般与 x_0 及 $\omega \in \Omega$ 有关. 若条件(31)满足，即 $\beta_1 < 0$, a.s.，则当 $\beta_1 < \beta < 0$，t 充分大时有

$$|x(t,x_0)| < \mathrm{e}^{-|\beta|t}, \text{a.s.}.$$

这意味着，方程(27)的起于 D 内任一点的解几乎必然指数衰减于零. 类似地，条件(32)意味着，方程(27)的起于 D 内任一点（$x_0 = 0$ 除外）的解按范数几乎必然指数增长至无穷，当然几乎必然无界.

由条件(31)显然可推出条件(30)，因此由a.s. 指数稳定可推出全局随机渐近稳定. 其次，若原点是 D 的内点，则由在 D 上全局随机渐近稳定可推出随机渐近稳定；而依定义，随机渐近稳定已包含了随机稳定. 以上事实，都是明显而基本的.

B. Liapunov 函数法

现在我们集中考虑a.s. 指数稳定(或不稳定)的判别法，这样的方法从ODE稳定性的一定判别法改制而来. 如所熟知，在ODE 的稳定性理论中，Liapunov 函数法起重要作用. 现在的目标是建立适用于SDE(27)的 Liapunov 函数法. 此处我们不拟追求太大的一般性，集中考虑本书将用到的特殊情况.

以下设 $f(0)=0, g(0)=0$. Liapunov 函数法的基本思想说来也很简单：为判定当 $t\to\infty$ 时 $x(t)=x(t,x_0)(x_0\in D)$ 的变化趋势，选定某个特定的Liapunov函数 $V(x)$，通过比较 $V(x(t))$ 与 $|x(t)|$ 来估计 $|x(t)|$，从而确定，当 $t\to\infty$ 时 $|x(t)|$ 呈指数衰减或指数增长. 为作如上比较，需用到随机微分 $\mathrm{d}V(x)$，这就要用到Itô公式

$$\mathrm{d}V(x)=LV(x)\mathrm{d}t+V'(x)g(x)\mathrm{d}u, \qquad \text{（依 3.1 节式(42)}'\text{)}$$

$$LV(x)=V'(x)f(x)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[g^{\mathrm{T}}(x)V''(x)g(x)\Sigma], \text{（依 3.1 节式(44)）} \tag{33}$$

其中 $V'(x)=\nabla V(x), V''(x)=\nabla^2 V(x), \Sigma=\mathrm{Var}(\mathrm{d}u)/\mathrm{d}t$. 利用上述记号，可表述如下判别法.

定理 设 $V(\cdot)\in C^2(D)$. 若存在 $q,c_1>0$ 及实数 $c_2,c_3(c_2<c_3/2)$，使得满足条件

$$\begin{cases}V(x)\geqslant c_1|x|^q, \quad LV(x)\leqslant c_2V(x),\\ V'(x)g(x)\Sigma\, g^{\mathrm{T}}(x)V'(x)^{\mathrm{T}}\geqslant c_3V^2(x),\end{cases} \quad x\in D, \tag{34}$$

则对任给 $x_0\in D$，如下结论之一成立：

(i) $|x(t,x_0)|$ 几乎必然指数衰减为零，即条件(31)满足；

(ii) 当 $t\to\infty$ 时 $x(t,x_0)$ 以正概率逸出区域 D.

若存在 $q,c_1>0$ 及实数 $c_2,c_3(c_2>c_3/2)$，使得满足条件

$$\begin{cases}0<V(x)\leqslant c_1|x|^q, \quad LV(x)\geqslant c_2V(x),\\ V'(x)g(x)\Sigma\, g^{\mathrm{T}}(x)V'(x)^{\mathrm{T}}\leqslant c_3V^2(x),\end{cases} \quad 0\neq x\in D, \tag{35}$$

则当 $0\neq x_0\in D$ 时如下结论之一成立：

(i) $|x(t,x_0)|$ 几乎必然指数增长，即条件(32)满足；

(ii) 当 $t\to\infty$ 时 $x(t,x_0)$ 以正概率逸出区域 D.

有效应用以上判别法的关键在于适当选定Liapunov 函数 $V(x)$ 及满足所述条件的常数 q,c_1,c_2,c_3. 一种最简单的方案是取 $V(x)=|x|^q, q>1$，且取 $c_1=1$，则不等式 $V(x)\geqslant c_1|x|^q$ 及 $0<V(x)\leqslant c_1|x|^q(0\neq x)$ 自动满足. 若令

$$c_2=\sup_{0\neq x\in D}\frac{LV(x)}{|x|^q}, \quad c_3=\inf_{0\neq x\in D}\frac{V'(x)g(x)\Sigma\, g^{\mathrm{T}}(x)V'(x)^{\mathrm{T}}}{|x|^{2q}},$$

则当 c_2,c_3 有限时条件(34)的后两个不等式亦自动满足，因而余下只要验证

$$\sup_{0\neq x\in D}\frac{2LV(x)}{|x|^q}<\inf_{0\neq x\in D}\frac{V'(x)g(x)\Sigma\, g^{\mathrm{T}}(x)V'(x)^{\mathrm{T}}}{|x|^{2q}}. \tag{36}$$

类似地，对于条件(35)只需验证

$$\inf_{0\neq x\in D}\frac{2LV(x)}{|x|^q}>\sup_{0\neq x\in D}\frac{V'(x)g(x)\Sigma\, g^{\mathrm{T}}(x)V'(x)^{\mathrm{T}}}{|x|^{2q}}. \tag{37}$$

C. 二次 Liapunov 函数

条件(36)与条件(37)中的 $V(x)$ 可取为任何 $|x|^q(q>1)$，但仅当取 $q=2$

时才获得最方便的形式. 这种选择固然颇受局限,但方法较简单且不失为有效. 本书中我们限于采用这种方法.

设 $V(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$, 则直接看出 $V'(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, V''(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{I}$; 注意如此简单的结果正是取 $V(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2$ 的主要好处;如用 $V(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^q (q \neq 2)$, 则无法得出这样简单的公式. 进而有

$$LV(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \mathrm{tr}[\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\Sigma}], \qquad \text{(用式(33))}$$

$$V'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})V'(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} = 4\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}.$$

将以上表达式代入不等式(36)与不等式(37)分别得到

$$\sup_{0\neq \boldsymbol{x}\in D} \frac{2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \mathrm{tr}[\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\Sigma}]}{|\boldsymbol{x}|^2} < \inf_{0\neq \boldsymbol{x}\in D} \frac{2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^4}, \tag{38}$$

$$\inf_{0\neq \boldsymbol{x}\in D} \frac{2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \mathrm{tr}[\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\Sigma}]}{|\boldsymbol{x}|^2} > \sup_{0\neq \boldsymbol{x}\in D} \frac{2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^4}. \tag{39}$$

特别,若 $n = p = 1$, 即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 皆为实值函数, $D = \mathbf{R}_+$, 则条件(38)与条件(39)分别简化为

$$\sup_{x>0} \frac{2xf(x) + \sigma_u^2 g^2(x)}{x^2} < \inf_{x>0} \frac{2\sigma_u^2 g^2(x)}{x^2}, \tag{40}$$

$$\inf_{x>0} \frac{2xf(x) + \sigma_u^2 g^2(x)}{x^2} > \sup_{x>0} \frac{2\sigma_u^2 g^2(x)}{x^2}. \tag{41}$$

作为释例,今将所得方法用于齐次线性SDE

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t + \sum_k \boldsymbol{G}_k\boldsymbol{x}\mathrm{d}u_k, \tag{42}$$

其中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{G}_k \in \mathbf{R}^{n\times n} (1 \leqslant k \leqslant p)$. 将方程(42)改写成标准形式(27),其中

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{x}, \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{G}_p\boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}^{n\times p}.$$

则

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x};$$

$$\mathrm{tr}[\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\Sigma}] = \sum_{j,k} \sigma_{jk}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{x};$$

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \mathrm{tr}[\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\Sigma}] = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \sum_{j,k} \sigma_{jk}\boldsymbol{G}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_k; \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = \sum_{j,k} \sigma_{jk}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_j\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{x}).$$

取 $D = \mathbf{R}^n$, 则对于方程(42)条件(38)与条件(39)分别相当于

$$\sup_{|\boldsymbol{x}|=1} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} < \inf_{|\boldsymbol{x}|=1} 2\sum_{j,k} \sigma_{jk}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_j\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{x}), \tag{43}$$

$$\inf_{|\boldsymbol{x}|=1} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} > \sup_{|\boldsymbol{x}|=1} 2\sum_{j,k} \sigma_{jk}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_j\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{x}). \tag{44}$$

将以上结果用到齐次线性SDE

$$\mathrm{d}x = x\left(a\mathrm{d}t + \sum_k g_k \mathrm{d}u_k\right), \tag{45}$$

其中 $a, g_k(1 \leqslant k \leqslant p)$ 为常数，得出结论：当

$$2a < \sum_{j,k} \sigma_{jk} g_j g_k \tag{46}$$

时，方程(45)的零解在 $\mathbf{R}$ 上a.s.指数稳定；当

$$2a > \sum_{j,k} \sigma_{jk} g_j g_k \tag{47}$$

时，方程(45)的零解在 $\mathbf{R}$ 上a.s.指数不稳定. 若 $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_p)^{\mathrm{T}}$ 是 p 维标准Brown运动，则条件(46)与条件(47)分别简化为

$$2a < \sum_k g_k^2 \quad 与 \quad 2a > \sum_k g_k^2.$$

所以不能指望比这更简单的稳定性判别法了.

另一方面，应用公式(20)′可写出方程(45)的解为

$$x(t, x_0) = x_0 \exp\left[\frac{1}{2}\left(2a - \sum_{j,k} \sigma_{jk} g_j g_k\right)t + \sum_k g_k u_k(t)\right] \quad (t \geqslant 0).$$

由此可直接求出，当 $0 \neq x_0 \in \mathbf{R}$ 时有

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\ln|x(t, x_0)|}{t} = \frac{1}{2}\left(2a - \sum_{j,k} \sigma_{jk} g_j g_k\right).$$

这就直接证实了条件(46)与条件(47)的正确性.

D. 平稳分布

考虑如下自治SDE：

$$\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}t + g(x)\mathrm{d}u, \tag{48}$$

其中 $f, g \in C^2(\mathbf{R}_+)$. 假定对任给 $x_0 \geqslant 0$，方程(48)存在起于点 x_0 且定义于 $[0, \infty)$ 上的解 $x(t)$. 在 $f(0) = g(0) = 0$ 的情况下，上段给出了判定方程(48)零解的a.s.指数稳定与不稳定的简便方法. 不过，对于实际应用来说，无论断定方程(48)的有正起点的解a.s.指数衰减或a.s.指数增长，常常都不是我们所希望的结果. 就确定性系统而言，理想的结果是系统的轨道渐近于某个非零均衡点. 当形如方程(48)的SDE出现在经济模型中时，通常并没有非零均衡点，这就无法简单地沿用处理确定性系统的思路. 如果针对随机的条件稍微变通一下，提出方程(48)的解 $x(t)$ 在 $t \to \infty$ 时是否渐进于某个非零随机变量 ξ 的问题，那么就可能获得有实际意义的肯定结果. 如果上述的 ξ 存在且是一个**连续型**随机变量，则 ξ 有概率密度函数 $\pi(\cdot)$，称它为由方程(48)决定的变量 x 的**平稳分布**. 显然，平稳分布正是确定性系统的渐近稳定非零均衡点的某种对应物. 如果能求出平稳分布 $\pi(\cdot)$，就用统计规律的形式表达了变量 x 的长期趋势或极限状态.

此处无法严格论证平稳分布的存在性，只是在假定平稳分布 $\pi(\cdot)$ 存在的前提下，用不那么严格的方法导出 $\pi(\cdot)$ 的计算公式. 由3.2.2B知，方程(48)的解

$x(t)$ 是一个扩散过程，它分别以 $f(x)$ 与 $\sigma_u^2 g^2(x)$ 为其漂移系数与扩散系数. 设 $f(0)=g(0)=0$，则由解的唯一性推出，当 $x(0)>0$ 时必定 $x(t)>0$, a.s. $(t>0)$. 设 $p(t,x_0,x)$ 是 $x(t)$ 的转移概率密度，即

$$p(t,x_0,x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(x(t)\leqslant x\,|\,x(0)=x_0).$$

由 Kolmogorov 前向方程(3.1 节式(3b))，有

$$\frac{\partial^2(\sigma_u^2 pg^2)}{\partial x^2}=2\frac{\partial(pf)}{\partial x}+2\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{49}$$

因 $\pi(\cdot)$ 是平稳分布，不妨设

$$p(\infty,x_0,x)=\pi(x),\quad \frac{\partial p(\infty,x_0,x)}{\partial t}=0\quad (x,x_0>0).$$

然后在方程(49)的两端令 $t\to\infty$ 得到

$$(\sigma_u^2\pi g^2)''=2(\pi f)',$$

其中撇号记对 x 求导. 上述推导用到极限与微分互换，其合理性并不显然. 所得方程两端积分后得

$$(\sigma_u^2\pi g^2)'=2\pi f+C_1=\frac{2f}{\sigma_u^2 g^2}(\sigma_u^2\pi g^2)+C_1,$$

其中 C_1 为常数. 不妨设

$$(\pi g^2)'|_{x=\infty}=0=\pi f|_{x=\infty},$$

因而 $C_1=0$. 于是再积分一次得到

$$\sigma_u^2\pi(x)g^2(x)=C\exp\left[2\int_1^x\frac{f(y)}{\sigma_u^2 g^2(y)}\mathrm{d}y\right],$$

$$\pi(x)=\frac{C}{\sigma_u^2 g^2(x)}\mathrm{e}^{2\varphi(x)},\quad \varphi(x)=\int_1^x\frac{f(y)}{\sigma_u^2 g^2(y)}\mathrm{d}y,\quad (x>0) \tag{50}$$

其中 C 为正常数，它取决于条件 $\int_0^\infty\pi(x)\mathrm{d}x=1$，即

$$1=C\int_0^\infty\frac{1}{\sigma_u^2 g^2(x)}\mathrm{e}^{2\varphi(x)}\mathrm{d}x.$$

利用上式表出的 C，亦可将式(50)表成

$$\frac{1}{\pi(x)}=\int_0^\infty\frac{g^2(x)}{g^2(y)}\mathrm{e}^{2\varphi(y)-2\varphi(x)}\mathrm{d}y\quad (x>0). \tag{51}$$

式(50)或式(51)就是我们所需要的平稳分布计算公式. 为使式(51)右端积分收敛，自然对函数 f 与 g 都有适当要求，这类要求在具体问题中是自明的，无需在此处作一般讨论.

一旦用公式(51)算出了 $\pi(x)$，就可用来计算相关变量的期望值：设 $z=h(x)$ 是任一与 x 有关的变量，则

$$\mathrm{E}z=\int_0^\infty h(x)\pi(x)\mathrm{d}x$$

就是在平稳状态下 z 的期望值，它正是与确定性系统的均衡值相当的东西．为行文方便，今后就称如上的 $\mathrm{E}z$ 为变量 z 的**平稳值**，并记作 $\bar{z}$（与均衡值 z^* 对应）．特别，

$$\bar{x} = \mathrm{E}x = \int_0^\infty x\pi(x)\mathrm{d}x$$

就是 x 的平稳值，它可看作 x 的某种均衡值．所有以上概念在应用于经济模型时都具有自然的直观意义．

参考文献

[1] Arnold L. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications [M]. New York: John Wiley & Sons, 1974.

[2] Gihman I, Skorohod A V. Stochastic Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1972.

[3] Ladde G S, Lakshmikantham V. Random Differential Inequalities[M]. New York: Academic Press, 1980.

[4] 廖晓昕．动力系统的稳定性理论和应用[M]．北京：国防工业出版社，2000.

[5] Malliaris A G, Brock W A. Stochastic Methods in Economics and Finance[M]. Amsterdam: North-Holland, 1982.

[6] Mao Z. Stochastic Differential Equations and their Applications [M]. New York: Horwood, 1997.

[7] 武宝亭等．随机过程与随机微分方程[M]．成都：电子科技大学出版社，1994.

3.3　随机最优化

鉴于经济行为无非是经济主体依据其利益最大化原则不断作出最优决策，最优化理论必然是经济分析的基本数学工具．从数学形式上看，动态宏观经济分析中出现的最优化问题，首先可区分为确定性的最优化问题与随机最优化问题两大类；其中每一类又可分为离散时间与连续时间两种形式．离散时间的随机最优化问题相对简单些，已在第 2 章中作了介绍；而连续时间的随机最优化方法及其应用，则构成本书余下部分的主要内容．在连续时间形式下，最优化理论能得到更完善的结论，因而是任何深入的经济分析所不可缺少的．然而，连续时间理论涉及更复杂的分析方法，本节远不足以深入展开有关的内容，我们将局限在本

书常用的那些特殊形式下的随机最优化问题.

3.3.1 一般理论

首先,我们对本书要用到的连续时间随机最优化问题的构成与解法作一个一般性的表述.这里所作的概括充分考虑到了本书的特殊需要,因而未必能达到随机最优化文献中通常具有的那种一般性.

A. 问题描述

如同已熟知的离散时间最优化问题一样,连续时间最优化问题由如下要素组成:变量(控制变量与状态变量)、目标函数(或目标泛函)、约束条件.其中,后者主要指描述状态变量演化规则的方程,即所谓状态方程.用经济模型的语言来说,最优化问题无非是:决策主体在其预算约束条件下,选择控制变量的最优轨道,以最大化(或最小化)其目标函数.因目标函数与约束条件均有极大的选择余地,可以想象,最优化问题必然具有极大的多样性.下面我们主要考虑宏观经济分析中大量使用的**随机跨时最优决策问题**,其一般形式为

$$\begin{cases} \max\limits_{x} \mathrm{E}_0\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho t} U(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t))\mathrm{d}t, & \text{(1a)} \\ \text{s.t.} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}t + \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0. & \text{(1b)} \end{cases}$$

其中,$U: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ 看作决策主体的**效用函数**(在最一般的意义上理解效用一词),$\boldsymbol{F}: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$,$\boldsymbol{G}: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^{m\times p}$,$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 分别为问题(1)的**控制变量**与**状态变量**,式(1b)就是**状态方程**,它正是3.2节中所述的随机微分方程;如同在3.2节中一样,$\boldsymbol{u} = (u_1,u_2,\cdots,u_p)^{\mathrm{T}}$ 是一个 p 维Brown运动;$\boldsymbol{y}_0$ 是给定的初始状态.在方程(1b)中,$\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 表达了状态变量 $\boldsymbol{y}$ 的平均变化率,而 $\boldsymbol{G}\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ 则是对 $\boldsymbol{y}$ 的随机扰动.我们总假定,对于一定范围内取定的 $\boldsymbol{x}(t)$,SDE(1b)存在唯一解 $\boldsymbol{y}(t)$,它满足 $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$.目标函数中的因子 $\mathrm{e}^{-\rho t}$ 显然相当于离散最优决策问题中的折现因子 β^t,$\rho(>0)$ 是时间偏好率.

若存在一对函数 $\boldsymbol{x}^*(t)$,$\boldsymbol{y}^*(t)$(通常均为随机函数),使得以 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$ 代入方程(1b)时,$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^*$ 满足方程(1b),且 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$,$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^*$ 使方程(1a)中的目标函数达到最大,则称 $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ 为问题(1)的解或**最优解**,其中 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 与 $\boldsymbol{y}^*(t)$ 分别称为**最优控制函数**与**最优轨道**.

从解离散最优化问题的经验看来,直接求出问题(1)的最优解大概可能性很小.如果能求出最优解应满足的一组条件(通常表为SDE),且能据此条件推出解的某些性质,通常就能令人满意了.因此,关于最优化问题的首要课题是求出解所满足的条件,这种条件称为**最优性条件**[①].最优性条件的导出基于一条基本原理,即所谓动态规划的**最优性原理**(Bellman,1957).此原理是最具普遍性的数学

① 最优性条件有必要条件与充分条件之分.本书所用到的最优性条件概为必要条件.

原理之一，在不同情况下可以表为很不同的形式. 就问题(1)而言，最优性原理可表述如下：若 (x^*, y^*) 是问题(1)的解，则对任何 $t \geqslant 0$，$\{(x^*(s), y^*(s)) : s \geqslant t\}$ 亦是子问题

$$\begin{cases} \max\limits_{x} \mathrm{E}_t \int_t^{\infty} \mathrm{e}^{\rho(t-s)} U(x(s), y(s)) \mathrm{d}s, \\ \text{s.t.} \quad \mathrm{d}y = F(s, x, y)\mathrm{d}s + G(s, x, y)\mathrm{d}u(s \geqslant t), y(t) = y^*(t) \end{cases} \tag{1$_t$}$$

的解. 以下以 $V(t, y^*(t))$ 记问题 $(1)_t$ 的最大目标值(简称为**最优值**). 最优性原理意味着 (x, y) 是问题(1)的最优解的充要条件是，(x, y) 满足状态方程(1b)，且

$$V(t, y(t)) = \mathrm{E}_t \int_t^{\infty} \mathrm{e}^{\rho(t-s)} U(x(s), y(s)) \mathrm{d}s \quad (t \geqslant 0). \tag{2}$$

今后称函数 $V(\cdot)$ 为问题(1)的**值函数**. 求出值函数的明显表达式可能性很小，且值函数亦不必作为求解的直接对象. 不过，值函数与问题的最优性条件密切相关，因而在最优性条件的表述及求解最优化问题的过程中常常起重要作用.

B. 最优性条件

假定问题(1)的值函数 $V(\cdot)$ 是一个 C^2 函数. 若 (x, y) 满足方程(1b)，则由 Itô公式(3.1 节式(42)′)有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V(t, y) &= V_t \mathrm{d}t + V_y \mathrm{d}y + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}} V_{yy} G \Sigma)\mathrm{d}t \\ &= LV(t, y)\mathrm{d}t + V_y G \mathrm{d}u, \end{aligned}$$

其中 $V_t = V_t(t, y(t))$，V_y，V_{yy} 仿此，Σ 依 3.1 节式(35)，

$$\begin{aligned} LV(t, y) &= \mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right] \\ &= V_t + V_y F + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}} V_{yy} G \Sigma). \quad (\text{用 3.1 节式(44)}) \end{aligned} \tag{3}$$

依据最优性原理推出的一个关键结论是：若 (x, y) 是问题(1)的最优解，则它必满足

$$\rho V(t, y) = \max_x [U(x, y) + LV(t, y)]. \tag{4}$$

式(4)称为问题(1)的**随机 Bellman 方程**，它的作用在于将一个跨时最优决策问题变成一个在每一时刻作静态最优决策的问题，而对后者可直接用经典微分学写出其微分条件. 这样，通过 Bellman 方程(4)，我们得到最优解 (x, y) 应满足的**必要条件**如下：

$$\begin{cases} \rho V = U + LV, \qquad (LV = LV(t, y)) & \text{(5a)} \\ 0 = U_x + (LV)_x, & \text{(5b)} \\ \rho V_y = U_y + (LV)_y. & \text{(5c)} \end{cases}$$

上述条件中，只有条件(5b)、条件(5c)是对方程(5a)求导得出的微分条件；通常说到问题(1)的最优性条件时，指的就是条件(5b)、条件(5c). 不过，为引用方便

起见，本书中将笼统地称条件(5a)～条件(5c)为问题(1)的最优性条件.

若以式(3)代入式(5)，则可得出式(5)的更详细的表达式. 不过，这些表达式太长，并不宜写出. 只考虑 $m=n=p=1$ 这一特殊情况，此时

$$LV = V_t + V_y F + \frac{1}{2}\sigma_u^2 G^2 V_{yy}, \qquad (用式(3)\ 或\ 3.1\ 节式(45))$$

代入条件(5)后得

$$\begin{cases} \rho V = U + V_t + V_y F + \dfrac{1}{2}\sigma_u^2 G^2 V_{yy}, & (6a) \\ 0 = U_x + V_y F_x + \sigma_u^2 G G_x V_{yy}, & (6b) \\ \rho V_y = U_y + V_{ty} + V_y F_y + (F + \sigma_u^2 G G_y) V_{yy} + \dfrac{1}{2}\sigma_u^2 G^2 V_{yyy}. & (6c) \end{cases}$$

现在让我们分析一下如何利用条件(5)来研究(或者求出)问题(1)的解. 首先，只要问题的提法合理，最优解以及由其决定的值函数的存在性就由问题的实际背景所保证. 因此，解的存在性通常被直接认定而不予讨论. 其次，方程组(5)与方程组(1b)一起原则上应能确定待求的最优解 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 与值函数 V. 实际上，为确定 $n+m+1$ 个未知函数

$$x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m,V,$$

有 $n+m+1$ 个一维的方程(如方程(1b)，条件(5a)、条件(5b))就够了. 这表明方程组(1b)、条件(5a)～条件(5c)并不是独立的. 读者必定注意到，方程组(5)中未知值函数 V 的存在使求解 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的问题复杂化了. 那么能否从(5)中消去 V? 若撤去随机干扰，即令 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{0}$，则确实可能联立条件(5b)、条件(5c)消去 V，得到一个关于$\boldsymbol{x}$ 的ODE，然后与式(1b)组成关于最优解$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$的ODE 组. 这样的方程组自然成为计算或者研究最优解的基础. 受这一事实鼓舞，我们自然期望：从方程组(5)导出一个关于$\boldsymbol{x}$ 的SDE，然后与式(1b)一起组成一组关于 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 的SDE. 然而，在随机干扰存在的情况下，上述设想并不容易实现. 关键的差别在于，LV 表达式中的二阶项(参看式(3))使问题大大复杂化了. 即使对于方程组(6)这种较简单的特殊情况，也不能从方程(6b)中解出 V_y，除非 $G\equiv 0$. 因此，对于最优性条件(5)的有效利用，需要某种新的思路，而且有赖于对函数U,$\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{G}$ 的很特殊的假设. 具体方法将在后面逐步展开.

C. 横截性条件

最优性条件(5)只是必要条件，一般并不是充分条件. 要从满足条件(1b)与(5)的那些 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 中挑选出问题(1)的最优解，常需要某些附加的约束条件. 横截性条件正属于这类条件，它可表为

$$\lim_{s\to\infty} \mathrm{E}_t[\mathrm{e}^{-\rho s}V(s,\boldsymbol{y}(s))] = 0 \quad (t \geqslant 0). \qquad (7)_t$$

直观上，条件 $(7)_t$ 意味着：当 $s\to\infty$ 时，当前所预期的未来最优折现效用将趋于零，这就排除了未来效用过渡扩张的可能性. 由此看来，条件 $(7)_t$ 是对于问题(1)的解的一个合理限制. 因此，我们规定问题(1)的最优解应满足横截性条件

$(7)_t (\forall\, t \geqslant 0)$.

因一般难以求得值函数 V 的明显表达式，这就使条件 $(7)_t$ 的验证成为问题. 在某些特殊情况下，可将条件 $(7)_t$ 转化为某个直接由 $y(t)$ 表达的等价条件. 具体方法将在相关模型的讨论中给出.

D. 自治问题

若函数 $U,\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}$ 均不显含 t，则称问题(1)为自治问题. 直观上，自治问题描述了这样的系统：无论动态效用函数 U 的计算还是状态变量的变化规律，都仅取决于变量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的水平，而不直接依赖时间. 这就意味着，系统已达到某种平稳状态；系统的各数量指标固然仍随时间变化，但其变化规则已不随时间改变了；或者说，系统的结构已不随时间变化了. 如果一个经济体已处于某种平稳发展状态，那么，与之有关的跨时最优决策问题正应是一个自治问题.

现在让我们考察一下，自治的最优化问题有哪些特点. 下面假定问题(1)是自治的.

(i) 值函数 $V(\cdot)$ 不显含 t.

证　取定 $t \geqslant 0$ 与 $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m$，设 $(\boldsymbol{x}(s),\boldsymbol{y}(s))$ 是问题

$$\begin{cases}\max\limits_{x} \mathrm{E}_t\displaystyle\int_t^{\infty} \mathrm{e}^{\rho(t-s)}U(\boldsymbol{x}(s),\boldsymbol{y}(s))\mathrm{d}s, \\ \text{s.t.}\quad \mathrm{d}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}s + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{u}(s \geqslant t), \quad \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}\end{cases}$$

的最优解. 令 $\bar{\boldsymbol{x}}(s) = \boldsymbol{x}(t+s), \bar{\boldsymbol{y}}(s) = \boldsymbol{y}(t+s), \bar{\boldsymbol{u}}(s) = \boldsymbol{u}(t+s), \bar{\mathrm{E}}_s = \mathrm{E}_{t+s}$，则易见 $(\bar{\boldsymbol{x}}(s),\bar{\boldsymbol{y}}(s))$ 是问题

$$\begin{cases}\max\limits_{x} \bar{\mathrm{E}}_0\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho s}U(\bar{\boldsymbol{x}}(s),\bar{\boldsymbol{y}}(s))\mathrm{d}s, \\ \text{s.t.}\quad \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\mathrm{d}s + \boldsymbol{G}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{u}}, \quad \bar{\boldsymbol{y}}(0) = \boldsymbol{y}\end{cases} \tag{$*$}$$

的最优解. 但问题(*)显然与问题(1)一致，因此 $V(t,\boldsymbol{y}) = V(0,\boldsymbol{y})$，这正表明 $V(t,\boldsymbol{y})$ 与 t 无关.　□

(ii) 自治问题(1)的值函数可表为

$$V(\boldsymbol{y}) = \mathrm{E}_0\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho t}U(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t))\mathrm{d}t, \tag{8}$$

其中 $(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t))$ 是最优解且满足 $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}$.

证　在式(2)中取 $t = 0$，即得式(8).

(iii) 横截性条件 $(7)_t$ 等价于

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}_0[\mathrm{e}^{-\rho t}V(\boldsymbol{y}(t))] = 0, \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{y}(t)$ 是状态变量的最优轨道.

证　因 $\boldsymbol{y}(s)$ 亦必为问题 $(1)_t$ 的最优轨道，故依前面的记号有

$$0 = \lim_{s\to\infty} \bar{\mathrm{E}}_0[\mathrm{e}^{-\rho s}V(\bar{\boldsymbol{y}}(s))] \qquad (\text{用式(9)})$$

$$=\lim_{s\to\infty} \mathrm{E}_t[\mathrm{e}^{-\rho s}V(y(s))]. \qquad \square$$

以上结论表明，对于自治问题，值函数的计算与横截性条件的验证都要简单一些. 这就促使我们尽可能采用自治问题作为经济分析中的最优决策模型，尽管这样作有时会稍稍偏离问题的实际背景，但方法上简化的好处有更大的吸引力.

E. Hamilton 函数法

现在以一种不同形式给出最优性条件. 为简单起见，仅考虑 $m = n = p = 1$ 的情况. 令 $\lambda = V_y, \mu = V_{yy}$，则条件(6b)与条件(6c)可写成

$$\begin{cases} 0 = U_x + \lambda F_x + \mu\sigma_u^2 GG_x, & (6b)' \\ \rho\lambda = U_y + \lambda_t + \lambda F_y + \mu(F + \sigma_u^2 GG_y) + \dfrac{1}{2}\sigma_u^2 G^2 \mu_y. & (6c)' \end{cases}$$

为给方程(6b)′、方程(6c)′一个简单的表达，作如下 **Hamilton 函数**：

$$H = U + \lambda F + \frac{\mu}{2}\sigma_u^2 G^2,$$

其中 $\lambda = \lambda(t,y), \mu = \mu(t,y)$ 满足 $\mu = \lambda_y$. 于是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = U_x + \lambda F_x + \mu\sigma_u^2 GG_x = 0, & (\text{用式(6b)}') \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = U_y + \lambda F_y + \mu\sigma_u^2 GG_y; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\lambda &= \lambda_t \mathrm{d}t + \lambda_y \mathrm{d}y + \frac{1}{2}\lambda_{yy}(\mathrm{d}y)^2 \\ &= \left(\lambda_t + \mu F + \frac{1}{2}\sigma_u^2 G^2 \mu_y\right)\mathrm{d}t + \mu G \mathrm{d}u \\ &= (\rho\lambda - U_y - \lambda F_y - \mu\sigma_u^2 GG_y)\mathrm{d}t + \mu G\mathrm{d}u \quad (\text{用式(6c)}') \\ &= \left(\rho\lambda - \frac{\partial H}{\partial y}\right)\mathrm{d}t + \mu G\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

这就得到如下最优性条件：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial H}{\partial y}\mathrm{d}t = \rho\lambda\mathrm{d}t - \mathrm{d}\lambda + \mu G\mathrm{d}u. \end{cases}$$

Hamilton 函数法通常用于确定性最优化问题：

$$\begin{cases} \max\limits_x \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t} U(x(t), y(t))\mathrm{d}t, \\ \text{s.t. } \dot{y} = F(t, x, y). \end{cases}$$

在前面所建立的公式中令 $G = 0$，得到

$$H = U + \lambda F,$$

其中 $\lambda = \lambda(t)$ 是 **Hamilton 函子**，最优性条件为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial x} = 0,\\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = \rho\lambda - \dot{\lambda}.\end{cases}$$

以上方程组与方程 $\dot{y} = F$ 一起构成的微分方程组确定了变量 x,y,λ.

本书将有几次机会应用Hamilton 函数法.

3.3.2　线性约束问题

在对函数 U,F,G 不作特殊限制的情况下，3.3.1 小节提出的一般理论已无法进一步展开. 像最优性条件(5)(或条件(6))这类过于一般化的结果，显然远不足以满足应用之需要. 在经济分析中，求出最优决策问题的某种显式解常常是令人向往的目标. 但如果状态方程(1b)是非线性的，那么就会成为严重障碍，因我们并无解非线性SDE 的一般方法. 这就促使我们不得不使用线性约束条件. 这类条件当然未必尽合现实，但其所带来的巨大简化仍然使它极具吸引力.

A. 问题描述与最优性条件

为简单起见，下面仅考虑 x 与 y 均为一维变量的情况. 所得结论的进一步推广，在具体问题中不难自然地写出.

具有线性约束且自治的最优决策问题的一般形式是

$$\begin{cases}\max\limits_{x} \mathrm{E}_0\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}U(x(t),y(t))\mathrm{d}t, & (10\mathrm{a})\\ \text{s.t.}\quad \mathrm{d}y = (by - ax + c)\mathrm{d}t + (py + q)\mathrm{d}u,\quad y(0) = y_0, & (10\mathrm{b})\end{cases}$$

其中 a,b,c,p,q 为常数，$\mathrm{d}u$ 为给定的Brown 运动. 注意随机扰动与控制变量 x 无关. $py\mathrm{d}u$ 与 $q\mathrm{d}u$ 分别称为乘性扰动与加性扰动，二者是常见的扰动形式. 后面的分析将表明，对于求得问题(10)的显式解，扰动形式的适当选择是关系重大的. 问题(10)的明显优势是，对方程(10b)可用3.2.1C 中的求解公式求解.

将最优性条件(6)用于问题(10)得出

$$\begin{cases}\rho V = U + (by - ax + c)V_y + \dfrac{1}{2}\sigma_u^2\varphi^2 V_{yy}\quad (\varphi = py + q), & (11\mathrm{a})\\ 0 = U_x - aV_y, & (11\mathrm{b})\\ \rho V_y = U_y + bV_y + (by - ax + c + p\sigma_u^2\varphi)V_{yy} + \dfrac{1}{2}\sigma_u^2\varphi^2 V_{yyy}. & (11\mathrm{c})\end{cases}$$

式(11b)这个最简单的条件特别令人注意，由其解出 $U_x = aV_y$，于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\mathrm{d}U_x &= \mathrm{d}V_y = V_{yy}\mathrm{d}y + \frac{1}{2}V_{yyy}(\mathrm{d}y)^2 && (\text{用 Itô 公式})\\ &= \left[(by - ax + c)V_{yy} + \frac{1}{2}\sigma_u^2\varphi^2 V_{yyy}\right]\mathrm{d}t + \varphi V_{yy}\mathrm{d}u && (\text{用式(10b)})\\ &= [(\rho - b)V_y - U_y - p\sigma_u^2\varphi V_{yy}]\mathrm{d}t + \varphi V_{yy}\mathrm{d}u. && (\text{用式(11c)})\end{aligned}$$

上式两端同除以 V_y，得出

$$\frac{\mathrm{d}U_x}{U_x}=(\rho-b)\mathrm{d}t-\frac{U_y}{V_y}\mathrm{d}t-\frac{\varphi V_{yy}}{V_y}(p\sigma_u^2\mathrm{d}t-\mathrm{d}u), \tag{12}$$

式(12)可看作问题(10)的Euler 方程. 若 $U_y\equiv 0$, $-\varphi V_{yy}/V_y\equiv\theta=\mathrm{const}$，则式(12)简化为

$$\mathrm{d}U_x=U_x(\alpha\mathrm{d}t-\theta\mathrm{d}u),\quad \alpha=\rho-b+\theta p\sigma_u^2, \tag{13}$$

式(13)是关于 U_x 的齐次线性SDE. 利用3.2节式(20)′从式(13)积出

$$U'(x(t))=U'(x(0))\exp\left[\left(\alpha-\frac{\theta^2\sigma_u^2}{2}\right)t-\theta u(t)\right]. \tag{14}$$

原则上，从式(14)可求出 $x(t)$；代入式(10b)后进而可求出 $y(t)$. 可见，在 $U_y\equiv 0$, $\varphi V_{yy}/V_y\equiv\mathrm{const}$ 的条件下可完全求得问题(10)的显式解. $U_y\equiv 0$ 这种情况是经常出现的. 然而，情况 $\varphi V_{yy}/V_y\equiv\mathrm{const}$ 的出现却远不具有普遍性.

B. 显式解

首先解释一下显式解的含义. 如果存在线性关系 $x=L(y)$，则以此代入式(10b)消去 x 之后得到一个关于 y 的线性SDE，因而可用3.2.1C中的公式求得 y（以及 x）的明显表达式. 如此看来，求得 x,y 的显式解似乎已不成问题. 然而关键是线性关系 $x=L(y)$ 从何而来？在经济分析中，问题的实际意义往往提示出关系 $x=\alpha y$ 或 $x=\alpha y+\beta$；即使如此，参数 α,β 仍然有待确定. 最优性条件(11b)应可用来决定参数，但未知 V 却是一个障碍. 由此可见，求出值函数 $V(y)$ 是关键所在. 可以说，求随机最优化问题的显式解，主要就是指求 V 的明显表达式. 求出 V 不仅对于求解 x,y 常常是必要的，而且 V 本身就有重要价值.

现在来探讨一下，是否有可能及如何求得 V 的显式解. 可用的工具就是Bellman 方程. 实际上，V 无非是二阶线性ODE

$$\sigma_u^2(py+q)^2V''+2(by-aL(y)+c)V'-2\rho V=-2U \tag{11a}$$

的解. 从线性ODE 理论知道，如上形式的方程一般并无显式解，除非 $U(\cdot)$ 是较特殊的函数（如二次函数、指数函数、幂函数等），且 p,q,a,b 等参数满足一定条件. 在可解的情况下，$V(\cdot)$ 的函数形式明显地依赖于 $U(\cdot)$ 的函数形式. 最后这一结论亦可从最优性条件(11b)导出

$$\begin{aligned}V(y)&=\int V'(y)\mathrm{d}y+C \qquad (C=\mathrm{const})\\&=\frac{1}{a}\int U_x(L(y),y)\mathrm{d}y+C,\quad(\text{用式(11b)})\end{aligned}$$

可见值函数 $V(\cdot)$ 是一个与 $U(\cdot)$ 有密切联系的函数. 特别地，若 U 与 y 无关（已提到这是经常出现的情况），则

$$V(y)=\frac{1}{a}\int U'(L(y))\mathrm{d}y+C \qquad (C=\mathrm{const})$$

$$=\text{const}\cdot U(L(y))+C,\qquad (\text{用 } L \text{ 为线性函数}) \tag{15}$$

此时可以认为 $V(\cdot)$ 与 $U(\cdot)$ 是同类函数.

依据以上分析,可将求解问题(10)的具体步骤表述如下.

(i) 设定 $x=L(y)=\alpha y+\beta$ 及 $V(y)$ 的函数形式,后者依据 $U(\cdot)$ 的函数形式猜定,其中含有若干待定参数,它们将在后续步骤中确定.

(ii) 将(i)中的设定代入方程(11b),得到 α,β 与 $V(\cdot)$ 中待定参数的一组关系式.

(iii) 将以上两步得到的式子代入方程(11a),确定所有待定参数.

(iv) 计算最优解 $x(t),y(t)$. 因有关系 $x=L(y)$,只需计算其中一个.例如,以 $x=L(y)$ 代入方程(10b)消去 x,然后可积出 $y(t)$. 此外,如上段中所见,在某些情况下亦可用式(14)求出 $x(t)$.

(v) 验证横截性条件(9). 条件(9)中的函数 $V(y)$ 与 $y(t)$ 分别依步骤(i)与(iv)得出. 为使条件(9)得以满足,通常要对模型参数附加某些限制性条件.

(vi) 验证对值函数 $V(\cdot)$ 的设定是否正确. 为此,只要验证等式(8),式(8)中的函数 $x(t),y(t)$ 依步骤(iv)求出,而 $y=y(0)$. 为完成此验证,通常恰好需要步骤(v)中限定模型参数的条件.

步骤(v)与(vi)可依具体情况互换次序.

要使以上步骤能顺利施行,显然要求选择较特殊的函数 $U(\cdot)$. 对 $U(\cdot)$ 的几种常用选择将在下小节中分别考虑.

3.3.3　特殊效用函数

在经济分析中常用的效用函数有:二次效用函数、CARA 效用函数及CRRA 效用函数等. 采用这些效用函数以及线性约束条件的随机最优化问题,可利用 3.3.2B中所述的方法求得显式解,分别考虑如下.

A. 二次效用函数

在离散时间消费决策模型的分析中已显示出二次效用函数的好处. 在目前情况下,采用二次效用函数使得求显式解成为可能. 设 $U(\cdot)$ 依 2.3 节式(7),则问题(10)可改写成

$$\begin{cases}\max\limits_{x} \mathrm{E}_0\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}\left[x(t)-\frac{m}{2}x^2(t)\right]\mathrm{d}t, & (16\mathrm{a})\\ \text{s.t.}\quad \mathrm{d}y=(by-ax+c)\mathrm{d}t+(py+q)\mathrm{d}u, & (16\mathrm{b})\end{cases}$$

不妨设 u 为标准Brown 运动(否则可将 σ_u 吸收进常数 p,q).

今依 3.3.2B 中拟定的标准步骤来解问题(16).

(i) 我们猜测,如同效用函数 $U(\cdot)$ 一样,值函数 $V(\cdot)$ 亦为二次函数,因此设 $V(y)=a_0+a_1y+a_2y^2$, 其系数待定.

(ii) 由 $U'(x) = 1 - mx = a(a_1 + 2a_2 y) = aV'(y)$ (依式(11b))解出

$$x = (1 - aa_1 - 2aa_2 y)/m \triangleq L(y). \tag{17}$$

如所预期的，$L(y)$ 确为线性函数.

(iii) 将 $V(y)$ 的表达式与式(17)代入方程(11a)，比较 y 各次幂的系数得出

$$\begin{cases} 2a^2 a_2 = m(\rho - 2b - p^2), \\ a_1 m(b + p^2) = 2a_2(cm + mpq - a), \\ \rho\, a_0 = (1 - aa_1)^2/2m + a_1 c + a_2 q^2. \end{cases} \tag{18}$$

(iv) 将 $x = L(y)$ (依式(17))代入式(16b)消去 x，得到关于 y 的线性SDE

$$\begin{cases} \mathrm{d}y = (\alpha y + \beta)\mathrm{d}t + (py + q)\mathrm{d}u, \quad y(0) = y_0, \\ \alpha = \rho - b - p^2, \beta = m^{-1}(a^2 a_1 - a) + c. \qquad \text{(用式(18))} \end{cases} \tag{19}$$

用3.2节中的求解公式(24)从方程(19)解出

$$y(t) = \mathrm{e}^{\psi(t)}\left[y_0 + (\beta - pq)\int_0^t \mathrm{e}^{-\psi(s)}\mathrm{d}s + q\int_0^t \mathrm{e}^{-\psi(s)}\mathrm{d}u(s)\right],$$

$$\psi(t) = (\alpha - p^2/2)t + pu(t).$$

然后利用3.1节式(29)变换积分 $\int_0^t \mathrm{e}^{-\psi(s)}\mathrm{d}s$，经某些计算后得到

$$y(t) = (g + y_0)\mathrm{e}^{\psi(t)} - g + h\int_0^t \mathrm{e}^{\psi(t)-\psi(s)}\mathrm{d}u(s), \tag{20}$$

其中

$$g = \frac{\beta - pq}{\alpha - p^2}, \quad h = \frac{\alpha q - \beta p}{\alpha - p^2}. \tag{21}$$

以式(20)代入 $x = L(y)$ 即可求出 $x(t)$，但此处无需写出其表达式.

(v) 验证等式(8)，即

$$a_0 + a_1 y_0 + a_2 y_0^2 = \mathrm{E}_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}\left[x(t) - \frac{m}{2}x^2(t)\right]\mathrm{d}t. \tag{22}$$

设 $x - (m/2)x^2 = b_0 + b_1 y + b_2 y^2$，以 $x = L(y)$ 代入比较系数得

$$b_0 = \frac{1 - a^2 a_1^2}{2m}, \quad b_1 = -\frac{2a^2 a_1 a_2}{m}, \quad b_2 = -\frac{2a^2 a_2^2}{m}. \tag{23}$$

为计算式(22)之右端，首先用3.1节式(31)′与式(32)求出

$$\mathrm{E}_0\mathrm{e}^{\psi(t)} = \mathrm{e}^{\alpha t}, \quad \mathrm{E}_0\mathrm{e}^{2\psi(t)} = \mathrm{e}^{(2\alpha+p^2)t}, \quad \mathrm{E}_0\mathrm{e}^{2\psi(t)-2\psi(s)} = \mathrm{e}^{(2\alpha+p^2)(t-s)}.$$

然后用式(20)算出

$$\mathrm{E}_0 y(t) = (g + y_0)\mathrm{E}_0\mathrm{e}^{\psi(t)} - g = (g + y_0)\mathrm{e}^{\alpha t} - g, \tag{24a}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_0 y^2(t) &= \mathrm{E}_0[(g + y_0)\mathrm{e}^{\psi(t)} - g]^2 + h^2\mathrm{E}_0\left[\int_0^t \mathrm{e}^{\psi(t)-\psi(s)}\mathrm{d}u(s)\right]^2 \\ &= (g + y_0)^2\mathrm{E}_0\mathrm{e}^{2\psi(t)} - 2g(g + y_0)\mathrm{E}_0\mathrm{e}^{\psi(t)} + g^2 \\ &\quad + h^2\int_0^t \mathrm{E}_0\mathrm{e}^{2\psi(t)-2\psi(s)}\mathrm{d}s \qquad \text{(用3.1节式(10))} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (g + y_0)^2 e^{(2\alpha+p^2)t} - 2g(g + y_0)e^{\alpha t} + g^2 + h^2\int_0^t e^{(2\alpha+p^2)(t-s)}ds \\
&= \left[(g + y_0)^2 + \frac{h^2}{2\alpha + p^2}\right]e^{(2\alpha+p^2)t} - 2g(g + y_0)e^{\alpha t} \\
&\quad + g^2 - \frac{h^2}{2\alpha + p^2}.
\end{aligned}
\tag{24b}
$$

利用式(24)与 $x - (m/2)x^2 = b_0 + b_1 y + b_2 y^2$，现在容易算出

$$
\text{式(22) 右端} = \frac{b_0 - b_1 g + b_2 g^2}{\rho} + \frac{(g + y_0)(b_1 - 2b_2 g)}{b + p^2} + \frac{b_2\rho(g + y_0)^2 + b_2 h^2}{\rho(2b + p^2 - \rho)}.
$$

在算出以上结果时，为使积分收敛，用了以下条件：

$$
2b + p^2 > \rho, \quad b + p^2 > 0. \tag{25}
$$

于是，比较式(22)两端之系数看出，式(22)成立的充要条件是

$$
\begin{cases}
a_2 = \dfrac{b_2}{2b + p^2 - \rho}, & (26a) \\[2ex]
a_1 = \dfrac{b_1 - 2b_2 g}{b + p^2} + \dfrac{2b_2 g}{2b + p^2 - \rho}, & (26b) \\[2ex]
\rho\, a_0 = b_0 - b_1 g + b_2 g^2 + \dfrac{g\rho(b_1 - 2b_2 g)}{b + p^2} + \dfrac{b_2(g^2\rho + h^2)}{2b + p^2 - \rho}. & (26c)
\end{cases}
$$

利用式(18)、式(23)容易验证等式(26a)成立. 利用式(18)、式(21)、式(23)，经颇繁琐的计算后可将等式(26b)化简为

$$
p(ap + bmq - cmp) = 0.
$$

因此，为使式(26b)成立，必须限定

$$
p = 0 \quad \text{或} \quad ap + bmq - cmp = 0.
$$

并无充分理由要求后一等式成立，因而只能选择 $p = 0$. 在 $p = 0$ 的条件下，条件(25)相当于 $2b > \rho$. 因此，下面假定 $p = 0, 2b > \rho$. 在 $p = 0$ 的假定下，由式(21)有 $g = \beta/\alpha, h = q$. 这与式(18)、式(23)一起代入式(26c)，经有些繁琐的计算可验证式(26c)的确成立，于是等式(8)得到验证.

(vi) 利用已得的公式(24)，通过类似于上面所作的计算，可以验证横截性条件(9)，其细节不必写出.

这就完成了问题(16)的求解. 值得注意的是，为使问题(16)存在二次值函数，应取加性扰动 $q\mathrm{d}u$；而取乘性扰动 $py\mathrm{d}u$ 则未必保证得出所要结果(但也不应因此断言问题无解). 这就印证了前面已指出的事实：是否能求得显式解与扰动的形式密切相关. 在下面几段中将反复证实这一结论.

在 $p = 0$ 的条件下，可适当简化式(17)～式(21). 首先由式(18)有

$$\begin{cases} 2a^2a_2 = m(\rho - 2b), \\ a^2a_1b = (\rho - 2b)(cm - a). \end{cases} \tag{18)'$$

进而由式(19)、式(21)得

$$\alpha = \rho - b, \quad \beta = (\rho - b)(cm - a)/bm,$$
$$g = \beta/\alpha = (cm - a)/bm, \quad h = q. \tag{21)'$$

结合式(17)与式(18)′、式(21)′得

$$x = m^{-1} - a^{-1}(\rho - 2b)(g + y).$$

于是，问题(16)的最优解为

$$\begin{cases} y(t) = (g + y_0)\mathrm{e}^{(\rho-b)t} - g + q\int_0^t \mathrm{e}^{(\rho-b)(t-s)}\mathrm{d}u(s), \\ x(t) = m^{-1} - a^{-1}(\rho - 2b)[g + y(t)], \end{cases} \tag{20)'$$

其中 g 依式(21)′.

在这一点上，读者大概容易联想到第2章的情况. 我们曾注意到，对于线性约束的离散时间最优决策问题，二次目标函数具有明显优势. 而本段的讨论表明，对于连续时间随机最优化问题的求解，选取二次效用函数固然可行，但对扰动有特殊要求且计算并不简单. 下面将看到，CARA 与 CRRA 效用函数更具优势.

B. CARA 效用函数

所谓CARA 效用函数，即常数绝对风险厌恶系数的效用函数，其一般形式为

$$U(x) = -\alpha^{-1}\mathrm{e}^{-\alpha x} \quad (\alpha > 0). \tag{27}$$

显然 $U(\cdot)$ 满足 $U'(\cdot) > 0, U''(\cdot) < 0$;

$$\alpha = -U''(x)/U'(x)$$

即为其常数绝对风险厌恶系数. 当取 $U(\cdot)$ 为式(27)时，问题(10)可写成

$$\begin{cases} \max\limits_x \mathrm{E}_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{-\alpha x(t)}\mathrm{d}t, & (28a) \\ \text{s.t.} \quad \mathrm{d}y = (by - ax + c)\mathrm{d}t + (py + q)\mathrm{d}u, \quad y(0) = y_0. & (28b) \end{cases}$$

仍设 u 为标准Brown 运动. 今依已熟知的标准程序，求解问题(28)如下.

(i) 参照 $U(\cdot)$ 的函数形式，设定值函数 $V(y) = -\xi\mathrm{e}^{-\eta y}$, ξ, η 是待定正参数.

(ii) 由 $U'(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x} = a\xi\eta\mathrm{e}^{-\eta y} = aV'(y)$ 解出(假定 $a > 0$)

$$x = (\eta y - \ln a\xi\eta)/\alpha \triangleq L(y). \tag{29}$$

(iii) 将式(27)、式(29)及 $V = -\xi\mathrm{e}^{-\eta y}$ 代入方程(11a)，得出 $p = 0$,

$$a\eta = \alpha b = \alpha\left(\rho + c\eta - \frac{1}{2}q^2\eta^2\right) + a\eta\ln a\xi\eta. \tag{30}$$

(iv) 将 $p=0$ 与式(29)代入方程(28b),得

$$dy=\beta dt+q du,\quad \beta=\alpha^{-1}a\ln a\xi\eta+c.$$

于是

$$y(t)=y_0+\beta t+qu(t). \tag{31}$$

(v) 验证横截性条件. 利用 $V=-\xi e^{-\eta y}$ 与式(31)算出

$$\begin{aligned}
&E_0[e^{-\rho t}V(y(t))]\\
&=CE_0\exp[-\rho t-\beta\eta t-q\eta u(t)] &&(C=\text{const})\\
&=C\exp\left[-\left(\rho+\beta\eta-\frac{q^2\eta^2}{2}\right)t\right] &&(\text{用 3.1 节式(31)}')\\
&=Ce^{-bt}\to 0\quad(t\to\infty), &&(\text{用式(30)})
\end{aligned}$$

注意,为使最后的结论成立,应限定参数 $b>0$.

(vi) 验证等式(8):

$$\begin{aligned}
&E_0\int_0^\infty e^{-\rho t}U(x(t))dt\\
&=-\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty E_0\exp[-\rho t-\eta y(t)+\ln a\xi\eta]dt &&(\text{用式(27)、式(29)})\\
&=-\frac{a\xi\eta}{\alpha}\int_0^\infty E_0\exp[-\rho t-\eta y_0-\beta\eta t-q\eta u(t)]dt &&(\text{用式(31)})\\
&=V(y_0)\frac{a\eta}{\alpha}\int_0^\infty \exp\left[-\left(\rho+\beta\eta-\frac{q^2\eta^2}{2}\right)t\right]dt &&(\text{用 3.1 节式(31)})\\
&=V(y_0)\frac{a\eta}{\alpha}\int_0^\infty e^{-bt}dt &&(\text{用式(30)})\\
&=V(y_0)\frac{a\eta}{ab}=V(y_0).
\end{aligned}$$

至此得出结论:当 $a>0,b>0,p=0$ 时,问题(28) 有形如 $V=-\xi e^{-\eta y}$ 的值函数,式(31)给出其最优轨道.

C. CRRA 效用函数

与CARA 效用函数类似的是常数相对风险厌恶效用函数(CRRA),其一般形式为

$$U(x)=\begin{cases}(x^{1-\sigma}-1)/(1-\sigma), & \sigma\neq 1,\\ \ln x, & \sigma=1,\end{cases} \tag{32}$$

其中参数 $\sigma>0$ 就是相对风险厌恶系数:

$$\sigma=-xU''(x)/U'(x).$$

注意到 U (及 U',U'')对 σ 在 $\sigma=1$ 连续,因此在涉及 $U(\cdot)$ 的所有论证中,不妨假定 $\sigma\neq 1$, 进而不妨设 $U(x)=x^{\sigma'}/\sigma',\sigma'=1-\sigma$.

以下设 $U(\cdot)$ 依式(32),依标准程序求问题(10)的显式解.

(i) 设 $V(y)=\delta U(y)$, 参数 $\delta>0$ 待定.

(ii) 由 $x^{-\sigma}=U'(x)=aV'(y)=a\delta y^{-\sigma}$ 解出

$$x=(a\delta)^{-1/\sigma}y\triangleq\mu y.\tag{33}$$

(iii) 将 $V=\delta U(y)$ 及式(32)、式(33)代入方程(11a)，得出 $c=q=0$，且

$$a\sigma\mu=\rho-b\,\sigma'+\frac{1}{2}p^2\sigma\,\sigma'\sigma_u^2.\tag{34}$$

由此可见，为使问题有形如 $\delta U(y)$ 的值函数，问题(10)的约束条件必须是齐次线性的. 下面设 $c=q=0$ 已满足.

(iv) 将 $x=\mu y$ 代入方程(10b)，得

$$\mathrm{d}y=y(\psi\mathrm{d}t+p\mathrm{d}u),\quad \psi=b-a\mu.$$

由此解出

$$y(t)=y_0\mathrm{e}^{\alpha t+pu(t)},\quad \alpha=\psi-p^2\sigma_u^2/2.\tag{35}$$

$x(t)$ 的表达式是自明的，不必写出.

(v) 验证横截性条件. 设 $y(t)$ 依式(35)，则

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_0[\mathrm{e}^{-\rho t}V(y(t))]&=C\mathrm{E}_0\exp[-\rho t+\sigma'(\alpha t+pu(t))]\quad(C=\text{const})\\&=C\exp\left\{-\left[\rho-\alpha\sigma'-\frac{(p\sigma')^2\sigma_u^2}{2}\right]t\right\}\quad(\text{用 3.1 节式(31)}')\\&=C\mathrm{e}^{-a\mu t}\to0(t\to\infty),\quad(\text{用式(34)})\end{aligned}$$

最后的结论要求 $a\mu>0$，这相当于(依式(34))

$$2\rho>\sigma'(2b-p^2\sigma\,\sigma_u^2).\tag{36}$$

下面设条件(36)已满足.

(vi) 验证等式(8)：

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}_0\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\rho t}U(x(t))\mathrm{d}t\\&=U(\mu)\mathrm{E}_0\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\rho t}[y(t)]^{\sigma'}\mathrm{d}t\quad(\text{用式(33)})\\&=U(\mu y_0)\int_0^\infty\mathrm{E}_0\exp\{-\rho t+\sigma'[\alpha t+pu(t)]\}\mathrm{d}t\quad(\text{用式(35)})\\&=U(\mu y_0)\int_0^\infty\mathrm{e}^{-a\mu t}\mathrm{d}t=(a\mu)^{-1}U(\mu y_0)=V(y_0),\end{aligned}$$

最后一步用到已确立的 $a\mu>0$ 与 $\mu^{-\sigma}=a\delta$ (依式(33)).

这就得出结论：若 $U(\cdot)$ 依式(22)，$c=q=0$ 且条件(36)满足，则问题(10)有形如 $V=\delta U(y)$ 的值函数，式(35)给出其最优轨道.

本段所用的方法在经济分析中最具推广价值. 为突出其特点，下面再作一些说明. 上面所求得的值函数 $V(y)$ 解自方程

$$\sigma_u^2y^2V''+2(b-a\mu)yV'-2\rho V=-2(\mu y)^{\sigma'}/\sigma'.$$

一般地，对于所谓 **Euler 方程**

$$y^2V''+byV'+cV=ay^\theta,$$

总能求出其通解

$$V = Ay^{\lambda_1} + By^{\lambda_2} + \delta y^{\theta},$$

其中 A,B 是任意常数，λ_1,λ_2 是特征方程

$$\lambda^2 + (b-1)\lambda + c = 0$$

的两个根；δy^{θ} 是方程的一特解，直接代入知

$$\delta = a/(\theta - \lambda_1)(\theta - \lambda_2) \quad (\theta \neq \lambda_1, \lambda_2).$$

通常利用形如式(11b)的最优性条件或者横截性条件可以排除 $Ay^{\lambda_1} + By^{\lambda_2}$(即可得出 $A = B = 0$)，因而确定 $V = \delta y^{\theta}$. 鉴于此，今后只要涉及最优化问题(其中控制变量 x 已依 $x = \mu y$ 代入)

$$\begin{cases} \max \mathrm{E}_0 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho t} y^{\theta}(t) \mathrm{d}t, \\ \mathrm{s.t.}\ \mathrm{d}y = y(\psi \mathrm{d}t + \mathrm{d}u), \quad y(0) = y_0, \end{cases}$$

则无例外地设定值函数 $V(y) = \delta y^{\theta}$，然后由最优性条件确定参数 δ.

3.3.4 均衡解

A. 一般说明

通常，问题(1)既不是自治的，也不是线性约束的，因而无法应用 3.3.2B 中所设计的求解程序. 然而，如 3.3.3 所证实的，所用过的求解程序是如此有效，这不能不强烈地促使我们将其用于更一般的情况.

从应用的角度考虑，对于问题(1)，我们真正需要的常常并非它的一般意义上的最优解，而是最优解的某种均衡状态，或者已达到均衡的最优解，下面不妨称之为**均衡解**. 正是这种均衡解描述了系统的某种极限状态. 就经济系统而言，均衡解恰好适于用来描述经济过程的长期趋势与经济决策行为的长期后果，具有特别重要的意义.

从方法的角度考虑，关键的问题是如何界定某种**动态均衡**. 这取决于问题的具体形式与实际背景，存在多种选择的可能. 在宏观经济分析中，通常的作法是提出一组**均衡条件**来限定问题所涉及的诸变量. 常用的均衡条件如下所述.

(i) **均衡水平限制**：假定某些变量在均衡时为常数，因而其增长率稳定地为零.

(ii) **均衡比率限制**：假定某些变量之比在均衡时为常数，因而这些变量在均衡时具有同样的随机增长率.

(iii) **均衡随机增长率限制**：假定某些变量在均衡时具有同样的随机增长率. 准确地说，x 与 y 有同样的随机增长率意味着(参看 3.2.1D)

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

若 $\mathrm{d}x = x(a\mathrm{d}t + b\mathrm{d}u)$，$\mathrm{d}y = y(\alpha \mathrm{d}t + \beta \mathrm{d}v)$，则上式相当于 $a = \alpha$，$b\mathrm{d}u = \beta \mathrm{d}v$.

一旦采用了均衡条件(i)、(ii)，就可以消去某些变量，这样做的结果往往使

状态方程简化为线性方程，从而有可能解出状态变量与控制变量. 这样得到的解也称为原问题的均衡解或均衡轨道，或者就称为最优解. 不过，这样求得的解中通常还包含待定参数，它们是给出均衡条件时设定的(均衡水平或均衡比率). 这些参数的确定要用到原问题的最优性条件及均衡条件(iii). 为利用最优性条件，必须适当地设定值函数.

基于上述分析，可设计如下求解程序.

(i) 写出原问题的最优性条件，此时并未提出均衡的问题.

(ii) 提出均衡条件，确定待求的均衡水平或均衡比率(可统称为**均衡值**).

(iii) 设定值函数 $V(\cdot)$，其方法如下：将均衡条件代入之后，原问题简化成一个自治问题，依据简化后的目标函数设定值函数. 如此设定的 $V(\cdot)$ 只应看作值函数的某种“均衡形式”，未必是原问题的真正意义下的值函数，因而未必能检验条件(8)与条件(9).

(iv) 利用原问题的最优性条件与所设定的均衡条件求出所有待定均衡值. 这一步往往是“解模型”的中心问题.

(v) 利用设定的均衡条件及已求得的均衡值简化原问题的状态方程，然后从该方程解出均衡轨道，或求出均衡增长率.

B. 解法

下面用一个简单例子来说明如何求一个随机最优化问题的均衡解. 考虑问题

$$\begin{cases} \max\limits_{x,z} \mathrm{E}_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}U(x(t)z(t))\mathrm{d}t, & (37\mathrm{a}) \\ \text{s.t.}\quad \mathrm{d}y = \left[y\varphi\left(\dfrac{yz}{v}\right) - ax\right]\mathrm{d}t + y\mathrm{d}u,\quad y(0) = y_0, & (37\mathrm{b}) \end{cases}$$

其中 $U(\cdot)$ 是具有参数 $\sigma>1$ 的CRRA 效用函数，x,z 与 y 分别为问题的控制变量与状态变量；$v=v(t)$ 是一随机函数，它对于决策者是给定的，但其最终确定依赖于决策问题(37)；$\varphi(\cdot)$ 是给定的普通可微函数. 求解问题(37)的步骤如下.

(i) 写出最优性条件(依式(6))：

$$\begin{cases} 0 = zU' - aV_y, & (38\mathrm{a}) \\ 0 = xU' + \dfrac{y^2}{v}\varphi' V_y = \left(\dfrac{ax}{z} + \dfrac{y^2}{v}\varphi'\right)V_y, \quad (\text{用式}(38\mathrm{a})) & (38\mathrm{b}) \\ \rho V_y = V_{ty} + \left(\varphi + \dfrac{yz}{v}\right)V_y + \left(\varphi - \dfrac{ax}{y} + \sigma_u^2\right)yV_{yy} + \dfrac{\sigma_u^2}{2}y^2V_{yyy}, & (38\mathrm{c}) \end{cases}$$

其中 $\varphi=\varphi(yz/v)$，φ' 仿此. 注意，写出以上条件时并不涉及均衡问题.

(ii) 提出均衡条件. 具体提法依赖于问题的实际背景，并非出自臆造. 对于本问题，我们设在均衡时

$$z \equiv \text{const},\quad x/y = \mu \equiv \text{const},\quad y \equiv v. \tag{39}$$

其中均衡水平 z 与均衡比率 μ 有待确定.

(iii) 设定值函数 $V(\cdot)$，因在均衡时 $U(xz)=\mathrm{const}\,U(x)$，故不妨设在均衡时 $V(y)=\delta U(y)$，参数 $\delta>0$ 待定(参照3.3.3C).

(iv) 确定常数 z,μ,δ. 为此，利用最优性条件(38a)～最优性条件(38c)与均衡条件(39). 首先，从条件(38a)与条件(38b)容易得到

$$a\delta=\mu^{-\sigma}z^{\sigma'}\quad(\sigma'=1-\sigma),\tag{40}$$

$$a\mu+z\varphi'(z)=0.\tag{41}$$

其次，利用 $V(y)=\delta U(y)$ 可验证

$$yV_{yy}=-\sigma V_y,\quad y^2V_{yyy}=\sigma\,\bar{\sigma}V_y.\quad(\bar{\sigma}=\sigma+1)\tag{42}$$

注意，等式 $yV_{yy}=-\sigma V_y$ 表明，V 如同 U 一样以 σ 为相对风险厌恶系数. 将式(39)、式(41)与式(42)代入条件(38c)，得到关于均衡值 z 的方程

$$\varphi(z)+z\varphi'(z)=\frac{\rho}{\sigma'}+\frac{\sigma\,\sigma_u^2}{2}.\tag{43}$$

设方程(43)有唯一解 z，则由式(41)与(40)唯一确定 μ 与 δ.

(v) 求出 x,y 的均衡轨道与均衡增长率. 将均衡条件(39)代入方程(37b)，得到如下齐次线性SDE：

$$\mathrm{d}y=y(\psi\mathrm{d}t+\mathrm{d}u),$$

其中 ψ 就是 y (也是 x)的均衡增长率，它可表为

$$\begin{aligned}\psi&=\varphi(z)-a\mu=\varphi(z)+z\varphi'(z)\\&=\frac{\rho}{\sigma'}+\frac{\sigma\,\sigma_u^2}{2}.\qquad\text{(用式(37b)、式(41)、式(43))}\end{aligned}\tag{44}$$

解所得齐次线性SDE，得到 y 的均衡轨道：

$$y(t)=y_0\exp[(\psi-\sigma_u^2/2)t+u(t)]\quad(t\geqslant 0).\tag{45}$$

然后由 $x=\mu y$ 得到 x 的均衡轨道，无须写出.

至此，可以说已求得问题(37)的均衡解.

若令 $u=0$，$v(t)$ 为普通函数，则问题(37)退化成一个确定性的最优化问题：

$$\begin{cases}\max\limits_{x,z}\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}U(x(t)z(t))\mathrm{d}t, & (46\mathrm{a})\\ \text{s.t.}\quad \dot{y}=y\varphi\left(\dfrac{yz}{v}\right)-ax. & (46\mathrm{b})\end{cases}$$

今用Hamilton 函数法来解问题(46)：作Hamilton 函数(依3.3.1E)

$$H=U(xz)+\lambda[y\varphi(yz/v)-ax],$$

则问题(46)的最优性条件为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial x}=zU'(xz)-a\lambda=0, & (47\mathrm{a})\\ \dfrac{\partial H}{\partial z}=xU'(xz)+\dfrac{\lambda y^2}{v}\varphi'\left(\dfrac{yz}{v}\right)=0, & (47\mathrm{b})\\ \dfrac{\partial H}{\partial y}=\lambda\left[\varphi\left(\dfrac{yz}{v}\right)+\dfrac{yz}{v}\varphi'\left(\dfrac{yz}{v}\right)\right]=\rho\,\lambda-\dot{\lambda}. & (47\mathrm{c})\end{cases}$$

约定 $g_x = \dot{x}/x$;g_y 等仿此. 由式(46b),式(47a)~式(47c)分别得到

$$\begin{cases} g_y = \varphi - a\mu \quad (\mu = x/y), & (48a) \\ g_\lambda = g_z - \sigma(g_x + g_z), & (48b) \\ axv + y^2 z\varphi' = 0, & (48c) \\ g_\lambda = \rho - \varphi - (yz/v)\varphi'. & (48d) \end{cases}$$

若均衡条件(39)满足,则 $g_x = g_y, g_z = 0$; 由式(48c)推出式(41);由式(41)、式(48a)、式(48b)、式(48d)推出

$$\varphi(z) + z\varphi'(z) = g_y = g_x = -\frac{g_\lambda}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}[\varphi(z) + z\varphi'(z)] - \frac{\rho}{\sigma},$$

由此解出

$$\varphi(z) + z\varphi'(z) = \rho/\sigma'. \tag{49}$$

另一方面,在式(43)中令 $\sigma_u^2 = 0$, 亦得出式(49). 由此可见,在扰动消失的情况下,依 Hamilton 函数法与待定值函数法得出同一结果.

参 考 文 献

[1] Bellman R. Dynamic Programming [M]. Princeton: Princeton Univ. Press, 1957.

[2] Dorfman R. An economic interpretation of optimal control theory [J]. Amer. Eco. Rev., 1969, 59: 817-831.

[3] Fleming W H, Rishel R W. Deterministic and Stochastic Optimal Control [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1975.

[4] 郭尚来. 随机控制[M]. 北京:清华大学出版社,1999.

[5] Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons [J]. Econometrica, 1974, 42: 267-272.

[6] 胡适耕,吴付科. 宏观经济的数理分析[M]. 北京:科学出版社,2004.

[7] Léonard D, Long N V. Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics [M]. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.

[8] Michel P. On the transversality condition in infinite horizon optimal problems [J]. Econometrica, 1982, 50: 975-985.

[9] Roche H. Stochastic growth: a duality approach [J]. J. Eco. Theory, 2003, 113: 131-143.

[10] 吴沧浦. 最优控制的理论与方法[M]. 第 2 版. 北京:国防工业出版社,2000.

第4章　连续时间随机模型

在作了第3章的准备之后，现在进入本书的核心内容：连续时间随机模型，它所用的基本数学工具是连续时间随机过程，以及随机最优化与随机微分方程. 因此，对于随机分析的某种程度的熟悉对于阅读本章是必需的.

研究连续时间随机模型，我们有两个自然的参照. 首先，容易注意到，本章与运用离散时间模型的第2章一样，几乎面对同样的经济问题. 由于本章对问题有和第2章相同或接近的提法，自然期望达到多少与之对应的结论. 然而，连续时间模型要用到更复杂的分析方法，因而必定达到更精细的结论与更深刻的理解. 其次，连续时间随机模型是相应的确定性模型的自然推广，后者与前者的区别在于随机扰动的有无. 在随机扰动存在的情况下，我们特别关注的问题是：扰动对于系统主要变量的增长及其稳定性产生什么影响？刻画扰动的参数(如方差)如何影响模型变量的均衡水平与均衡增长率？如何影响模型主要变量的均衡增长轨道？对于这类问题的解答是饶有趣味且意义重大的.

依是否使用最优决策，本章的模型又分为两大类：单纯的随机微分方程模型与最优决策模型，两者分别以 Solow 模型与 Ramsey 模型为其代表. 在宏观经济分析中，最优决策模型无疑是更重要的，因而自然构成本章的主体.

4.1　经济增长

本节实际上只考虑一类较单纯的经济增长模型，它不涉及决策行为. 这类模型的原型是 Solow 模型(Solow，1956)，它是所谓新古典增长理论的起点. Solow 模型及其推广都基于如下基本设定：社会总产出完全决定于要素的总投入；总产出在消费与积累之间依固定比例进行分配，因而要素的积累依赖于固定的规律，而与经济主体的决策无关. 因此，经济增长完全取决于生产函数与要素的积累规律，后者用一定的微分方程描述. 与经典的增长模型的差别在于，本节假定要素的积累受到某种随机干扰，因而要素积累方程从 ODE 过渡到 SDE，而对模型的分析归结为对所得 SDE 的分析. 本节的主要结论是，随机干扰有可能实质性地改变由确定性增长模型所预言的增长轨道.

本节所涉及的生产要素是：劳动力投入 L，物资资本 K 与人力资本 H 等.

我们首先考虑忽略技术因素的随机 Solow 模型与人力资本模型，然后引入技术因素并考虑技术的内生增长，这一课题涉及 R&D 模型与边干边学模型. 本节不考虑价格因素，因此 K,Y 等变量均为实际变量.

4.1.1 Solow 模型

A. 模型描述

考虑这样一个经济体：其总产出 Y 取决于所谓**新古典生产函数** $Y = F(K, L)$，这意味着 $F(\cdot)$ 为 1 次齐次函数[①]，且 $f(k) \triangleq F(k,1)$ 满足以下条件：

$$\begin{cases} f'(k) > 0, \quad f''(k) < 0, \; f(k) > kf'(k) \; (k > 0); & \text{(1a)} \\ f(0) = f'(\infty) = 0, \quad f'(0) = f(\infty) = \infty. & \text{(1b)} \end{cases}$$

解释新古典生产函数的最简单例子是最常用的 **Cobb-Douglas 生产函数**：

$$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \quad (A > 0 < \alpha < 1), \tag{2}$$

可直接看出 $f(k) = Ak^{\alpha}$ 满足条件(1).

现在考虑生产要素 K,L 的增长规律. 在确定性 Solow 模型中，取

$$\dot{K} = sY - \delta K, \quad \dot{L} = nL, \tag{3}$$

其中 $s \in (0,1)$ 是常数储蓄率，这表明总产出 Y 按固定比例分解为资本积累 sY 与消费 $C = (1-s)Y$ 两部分；$\delta \in [0,1]$ 是资本折旧率；n 是常数人口增长率，并不假定 $n > 0$. 因不考虑就业问题，故不妨设所有的人都在工作，因而 n 就是劳动力增长率. 与确定性 Solow 模型的区别是，现在假定 K 与 L 的增长都受到某种随机干扰，干扰的强度分别与 K,L 成比例. 例如，资本与劳动力都可能存在随机的流进与流出. 此处不讨论干扰的具体来源，只是假定，在干扰存在的情况下积累方程(3)修改为

$$\begin{cases} \mathrm{d}K = (sY - \delta K)\mathrm{d}t + K\mathrm{d}u_K, & \text{(4a)} \\ \mathrm{d}L = L(n\mathrm{d}t + \mathrm{d}u_L), & \text{(4b)} \end{cases}$$

其中 $\mathrm{d}u_K$ 与 $\mathrm{d}u_L$ 是给定的 Brown 运动. 以 $\sigma_K^2\mathrm{d}t$ 记 $\mathrm{d}u_K$ 的方差，即 $\mathrm{Var}(\mathrm{d}u_K) = \sigma_K^2\mathrm{d}t$；$\sigma_L^2$ 仿此. 其次约定

$$\mathrm{cov}(\mathrm{d}u_K, \mathrm{d}u_L) = \sigma_{KL}\mathrm{d}t.$$

今后涉及 Brown 运动时将总使用这类记号法而不另作说明. 方程(4)中扰动项的 Brown 运动特性表明，对于 K 与 L 的干扰是大量微小因素独立作用的综合结果，而这应当说是近于现实的.

方程(4)是关于变量 K,L 的随机微分方程组，它并不便于分析. 如同处理确定性 Solow 模型一样，较好的方法是以人均资本存量 $k = K/L$ 取代变量 K,L.

---

① 当 $F(K,L)$ 满足恒等式 $F(tK,tL) \equiv t^{\alpha}F(K,L)$ 时称 F 为 α 次齐次函数. 对于Solow 模型，可放松"新古典生产函数"这一条件，但 1 次齐次生产函数是总要求的.

况且,用 k 来刻画经济发展水平是更合理的. 由随机微分的商规则(参看 3.1 节式(28b))[①],有

$$\mathrm{d}k = \frac{K}{L}\left(\frac{\mathrm{d}K}{K} - \frac{\mathrm{d}L}{L}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{d}L}{L}\right)$$
$$= k\left[\frac{sF(K,L)}{K}\mathrm{d}t - \delta\mathrm{d}t + \mathrm{d}u_K - n\mathrm{d}t - \mathrm{d}u_L\right](1 - n\mathrm{d}t - \mathrm{d}u_L).$$

注意 $F(K,L) = Lf(k)$, 应用乘法表(3.1 节式(43))乘上式右端,得到

$$\mathrm{d}k = [sf(k) - \mu k]\mathrm{d}t + k\mathrm{d}u, \tag{5}$$

其中

$$\mu = n + \delta + \sigma_{KL} - \sigma_L^2, \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}u_K - \mathrm{d}u_L. \tag{6}$$

方程(5)就是随机Solow 模型的SDE,它是关于 k 的一个自治SDE,当 $f(\cdot)$ 满足条件(1)时方程(5)必定是非线性的. 若 $\sigma_K = \sigma_L = 0$, 即随机干扰消失,则方程(5)退化为ODE

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k, \tag{5'}$$

这正是确定性Solow 模型的微分方程.

无论方程(5)或方程(5)′,都不能求出显式解,因此只能对其作某些定性分析.

B. 某些结论

从SDE(5)可得出如下结论.

(i) 人均资本存量 $k(t)$ 是一个齐次扩散过程,其漂移系数与扩散系数分别为 $sf(k) - \mu k$ 与 $k^2(\sigma_K^2 - 2\sigma_{KL} + \sigma_L^2)$.

(ii) 扩散过程 $k(t)$ 的Markov 性表明,在统计的意义上,可用当前的经济状态预测未来的经济发展. 准确地说,若已知 $k(t) = k$ 而 $s > t$, 则 $k(s)$ 的概率分布完全由 $k(t) = k$ 决定. 原则上,利用 $k(t)$ 的漂移系数、扩散系数与Kolmogorov 方程(见3.1 节式(3)),可求出 $k(t)$ 的转移密度函数 $p(t,k,k_1)$. 若 $s > t$, 则对任何区间 (a,b) 有

$$P(a < k(s) < b \mid k(t) = k) = \int_a^b p(s - t, k, y)\mathrm{d}y.$$

这一类的信息对于经济决策者无疑是有意义的.

(iii) 由方程(5)得出 k 的期望增长率为

$$\psi \triangleq \frac{\mathrm{E}[\mathrm{d}k/\mathrm{d}t]}{k} = \frac{sf(k)}{k} - \mu = sk^{-1}f(k) - (n + \delta + \sigma_{KL} - \sigma_L^2).$$

若随机扰动消失,则得到确定性的增长率

$$g_k \triangleq \dot{k}/k = sk^{-1}f(k) - (n + \delta).$$

---

① 直接用3.2 节中的式(25): $\psi_k = \psi_K - \psi_L - \sigma_{KL} + \sigma_L^2$, $\mathrm{d}u_k = \mathrm{d}u_K - \mathrm{d}u_L$, 可更简捷地得出下面的式(5)、式(6).

注意 $\psi - g_k = \sigma_L^2 - \sigma_{KL}$ 可正可负.这就表明,平均地说,随机扰动的出现可能提高增长率(当 $\sigma_L^2 > \sigma_{KL}$),亦可能降低增长率(当 $\sigma_L^2 < \sigma_{KL}$).若 L 的扰动强于 K 的扰动,则

$$\sigma_{KL} \leqslant \sigma_K \sigma_L < \sigma_L^2\text{①},$$

此时必 $\psi > g_k$,即增长率提高.这一结论在直观上未必是显然的.在极端情况下,若 L 受到扰动而 K 未受干扰,即 $\sigma_L^2 > 0 = \sigma_K^2$,则增长率提高;若仅有 K 受到扰动,则增长率不变.可见对于劳动力与资本的干扰其后果很不一样,这一事实将反复见于本节的其他增长模型.从数学上看,方程(4a)与方程(4b)显然是不对称的:L 的增长与 K 无关,而 K 的增长则与 L 有关.由此看来,在Solow 模型中,L 是一个更能动的要素.

C. 稳定性

对于方程(5)′的稳定性分析是很简单的:若 $\mu = n + \delta > 0$,则存在唯一的均衡水平 $k^* > 0$,满足 $sf(k^*) = \mu k^*$;若 $k(0) > 0$,则必定 $k(t) \to k^*\ (t \to \infty)$,即均衡解 $k(t) \equiv k^*$ 在区间 $(0,\infty)$ 内全局渐近稳定.直观上,这意味着,无论经济起点 $k(0) > 0$ 如何,$k(t)$ 最终必稳定于均衡水平 k^*,而增长率 g_k 则渐近于零.

随机扰动出现之后,稳定性发生明显变化.首先,方程(5)除零解之外,并无其他均衡点,可见前面所述的正均衡点 k^* 已被随机扰动湮没,更谈不上渐近于某个正均衡状态的问题.其次,方程(5)的零解的稳定性并不明显;而方程(5)′的零解则明显地是不稳定的.

今用3.2.3C 中的方法来分析方程(5)的零解的稳定性.首先注意 $du = du_K - du_L$(依式(6))是一个 Brown 运动(参考 3.1.1C),

$$\sigma_u^2 = \sigma_K^2 - 2\sigma_{KL} + \sigma_L^2.$$

取 $D = [0,\infty)$,将3.2 节中的不等式(40)、(41)用到方程(5)可分别写成

$$\sup_{k>0}\ [2sk^{-1}f(k) + \sigma_u^2 - 2\mu] < 2\sigma_u^2$$

与

$$\inf_{k>0}\ [2sk^{-1}f(k) + \sigma_u^2 - 2\mu] > 2\sigma_u^2.$$

以上条件显然又可以分别改写为

$$\sup_{k>0} \frac{f(k)}{k} < \frac{\sigma_u^2 + 2\mu}{2s} \tag{7}$$

---

① 设 r 是 du_K 与 du_L 的相关系数,则

$$|r| = \frac{|\text{cov}(du_K, du_L)|}{\sqrt{\text{Var}(du_K)\text{Var}(du_L)}} = \frac{|\sigma_{KL}|}{\sigma_K \sigma_L} \leqslant 1,$$

可见 $\sigma_{KL} \leqslant \sigma_K \sigma_L$ 总是成立的.

与

$$\inf_{k>0}\frac{f(k)}{k}>\frac{\sigma_u^2+2\mu}{2s}. \tag{8}$$

令 $\varphi(k)=f(k)/k$，则用条件(1)推出

$$k^2\varphi'(k)=kf'(k)-f(k)<0\quad(k>0)$$

$$\lim_{k\to0}\varphi(k)=f'(0)=\infty,$$

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(k)=f'(\infty)=0.$$

从这些结论显然得出

$$\sup_{k>0}\varphi(k)=\varphi(0)=\infty,\quad \inf_{k>0}\varphi(k)=\varphi(\infty)=0.$$

这就可将条件(7)与条件(8)分别写成

$$\infty<\sigma_u^2+2\mu \tag{7$'$}$$

与

$$0>\sigma_u^2+2\mu. \tag{8$'$}$$

式(7)′不可能成立，这就排除了用式(7)推出零解在 $[0,\infty)$ 内a.s.指数稳定的可能性.其次，条件(8)′相当于

$$2(n+\delta)+\sigma_K^2<\sigma_L^2. \tag{9}$$

这就表明，若对 L 的扰动偏强，准确地说，若 σ_L^2 相对于 n,δ,σ_K^2 偏大，则方程(5)的零解在 $[0,\infty)$ 内是a.s.指数不稳定的①，即当经济从正起点起步时a.s.呈指数增长.这一结论无疑是值得高度关注的.

D. 平稳分布

上段中我们得出了零解a.s.指数不稳定的条件(9).但当 $\sigma_K^2=\sigma_L^2=0$(即扰动消失)时条件(9)已不满足，因而所得结论并不能对确定性Solow模型作出什么推断.可以推想，与确定性条件下的稳定性结论相对应的，应当是平稳分布②.现在就用3.2.3D中的方法来计算Solow模型的平稳分布.设 k 依方程(5)，其中生产函数取为 $k^\alpha(0<\alpha<1)$，以 $\pi(k)$ 记待求的平稳分布.分别以 $(sk^\alpha-\mu k)$ 与 k 代替 f 与 g 应用3.2节式(50)与式(51).首先算出

$$\varphi(k)\triangleq\int_1^k\frac{sx^\alpha-\mu x}{\sigma_u^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{s(1-k^{-\alpha'})}{\alpha'\sigma_u^2}-\frac{\mu}{\sigma_u^2}\ln k,$$

于是

$$\frac{1}{\pi(k)}=\int_0^\infty\frac{k^2}{x^2}\mathrm{e}^{2\varphi(x)-2\varphi(k)}\mathrm{d}x \qquad (\text{用 3.2 节式(51)})$$

---

① 对照3.2.3B中的判别法可以看出，此处隐蔽地认定了一个事实：方程(5)起于 $D=[0,\infty)$ 内的解的轨道(几乎必然地)不逸出 D，这易由解的唯一性推出.

② 首先将平稳分布概念应用于经济增长理论的是Bourguignon(1974)与Merton(1975).类似于本段的结果首先由Merton(1975)得出.

$$=k^2 e^{-2\varphi(k)}\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\exp\left(\beta-\beta x^{-\alpha'}-\frac{2\mu}{\sigma_u^2}\ln x\right)dx \qquad \left(\beta=\frac{2s}{\alpha'\sigma_u^2}\right)$$

$$=k^2 e^{\beta-2\varphi(k)}\int_0^\infty x^{-2-2\mu/\sigma_u^2}\exp(-\beta x^{-\alpha'})dx$$

$$=k^2 e^{\beta-2\varphi(k)}\frac{1}{\alpha'}\beta^{-\omega}\int_0^\infty t^{\omega-1}e^{-t}dt \qquad \left(\omega=\frac{2\mu+\sigma_u^2}{\alpha'\sigma_u^2}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(\omega)}{\alpha'}\beta^{-\omega}k^{2+2\mu/\sigma_u^2}\exp(\beta k^{-\alpha'}),$$

故得

$$\pi(k)=\frac{\alpha'}{\Gamma(\omega)}\beta^{\omega}k^{-2-2\mu/\sigma_u^2}\exp(-\beta k^{-\alpha'}) \quad (k>0).$$

为使 $\pi(k)$ 有定义,显然要求 $\omega>0$,这相当于

$$0<2\mu+\sigma_u^2=2(n+\delta)+\sigma_K^2-\sigma_L^2. \tag{9$'$}$$

由此可见,条件(9)′与条件(9)恰好相反,这是很自然的:有正起点的解 $k(t)$ 收敛于平稳分布与a.s.指数增长这两件事是不能并存的.

下面设条件(9)′满足,今利用已求得的 $\pi(k)$ 来计算各种"平稳值". 为记号简便起见,除了使用已约定的记号 β,ω 之外,再约定

$$\omega_\tau=(2\mu+\tau'\sigma_u^2)/\alpha'\sigma_u^2=\omega-\tau/\alpha'.$$

显然 $\omega=\omega_0$. 设 k 服从平稳分布,则

$$Ek^\tau=\int_0^\infty k^\tau\pi(k)dk=\frac{\alpha'}{\Gamma(\omega)}\beta^{\omega}\int_0^\infty k^{\tau-2-2\mu/\sigma_u^2}\exp(-\beta k^{-\alpha'})dk$$
$$=\beta^{\tau/\alpha'}\Gamma(\omega_\tau)/\Gamma(\omega).$$

特别,分别取 $\tau=1,\alpha$ 与 $-\alpha'$ 得到如下平稳值:

$$\bar{k}\triangleq Ek=\beta^{1/\alpha'}\Gamma(\omega_1)/\Gamma(\omega);$$

$$\bar{y}\triangleq Ek^\alpha=\beta^{\alpha/\alpha'}\frac{\Gamma(\omega_\alpha)}{\Gamma(\omega)}=\beta^{\alpha/\alpha'}\frac{\Gamma(\omega_1+1)}{\Gamma(\omega)}=\beta^{\alpha/\alpha'}\frac{\omega_1\Gamma(\omega_1)}{\Gamma(\omega)}=\frac{\mu}{s}\bar{k},$$

$$E\left(\frac{y}{k}\right)=Ek^{-\alpha'}=\beta^{-1}\frac{\Gamma(\omega_{-\alpha'})}{\Gamma(\omega)}=\beta^{-1}\frac{\Gamma(\omega+1)}{\Gamma(\omega)}=\beta^{-1}\omega=\frac{2\mu+\sigma_u^2}{2s}.$$

我们最关心的事情是以上结果与确定性系统(5)′的均衡值有何联系. 在式(5)′中令 $f(k)=k^\alpha$,直接看出 k 的正均衡值为

$$k^*=\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{1/\alpha'},$$

自然假定 $n+\delta>0$. 现在将 $\bar{k}$ 与 k^* 作一比较. 约定

$$\varepsilon=\frac{1}{\alpha'}>1, \quad x=\frac{2\mu}{\alpha'\sigma_u^2}=\omega_1,$$

注意当 $\sigma_u^2\to 0$ 时 $x\to\infty$. 于是

$$\frac{\bar{k}}{k^*}=\left(\frac{2n+2\delta}{\alpha'\sigma_u^2}\right)^\varepsilon\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\varepsilon)}=\left(\frac{n+\delta}{\mu}\right)^\varepsilon\frac{x^\varepsilon\Gamma(x)}{\Gamma(x+\varepsilon)},$$

当 $\sigma_u^2 \to 0$ 时显然有 $((n+\delta)/\mu)^\varepsilon \to 1$. 为估计 $h(x) \triangleq x^\varepsilon \Gamma(x)/\Gamma(x+\varepsilon)$，我们要用到如下 Stirling 公式：

$$\ln\Gamma(x) = \ln\sqrt{2\pi} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln x - x + \frac{\theta}{12x} \quad (0 < \theta < 1).$$

将以上公式用到 $\ln h(x)$ 得：

$$\begin{aligned}\ln h(x) &= \varepsilon\ln x + \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln x - x + \frac{\theta}{12x} \\ &\quad - \left(x + \varepsilon - \frac{1}{2}\right)\ln(x+\varepsilon) + x + \varepsilon - \frac{\theta_1}{12(x+\varepsilon)} \\ &= \varepsilon - \left(x + \varepsilon - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{x}\right) + \frac{\theta}{12x} - \frac{\theta_1}{12(x+\varepsilon)} \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\theta}{12} - \frac{\theta_1}{12}\right) + \cdots \to 0 \quad (x \to \infty),\end{aligned}$$

因而 $h(x) \to 1 (x \to \infty)$. 这就表明，当 $\sigma_u^2 \to 0$ 时 $\bar{k} \to k^*$. 这正是我们所期望的结论：若随机扰动消失，则 k 的平稳值重合于 k 在确定性 Solow 模型中的均衡值.

其次比较一下 $\bar{k}$ 与 k^* 的大小关系. 为简单起见，下面设 $\sigma_K^2 = 0$，$\sigma_u^2 = \sigma_L^2$ 适当小，则

$$\frac{\bar{k}}{k^*} = \left(\frac{2\mu + 2\sigma_u^2}{\alpha' \sigma_u^2}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\varepsilon)} = \frac{(x+2\varepsilon)^\varepsilon \Gamma(x)}{\Gamma(x+\varepsilon)} \triangleq h_1(x);$$

$$\begin{aligned}\ln h_1(x) &= \varepsilon\ln(x + 2\varepsilon) + \ln\Gamma(x) - \ln\Gamma(x+\varepsilon) \\ &= \varepsilon\ln x + \varepsilon\ln\left(1 + \frac{2\varepsilon}{x}\right) + \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln x - x + \frac{\theta}{12x} \\ &\quad - \left(x + \varepsilon - \frac{1}{2}\right)\left[\ln x + \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{x}\right)\right] + x + \varepsilon - \frac{\theta_1}{12(x+\varepsilon)} \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{3\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\theta}{12} - \frac{\theta_1}{12}\right) + \cdots > 0.\end{aligned}$$

由此可见，当 $\sigma_u^2 = \sigma_L^2$ 适当小时有 $\bar{k} > k^*$，即劳动力供应的轻度波动使资本的平稳值从确定性模型的均衡值上移. 这一结论无疑是有意义的，它未必容易从直接观察得出.

4.1.2 人力资本模型

现在在 Solow 模型的基础上增加一个要素投入，即人力资本 H. 考虑人力资本在经济上是一个实质性的突破；但从数学形式上看，这只是将 Solow 模型推广为二维而已. 下面的分析表明，对于人力资本模型，可达到非常类似于 Solow 模型的结论. 下面给出的模型在确定性形式下接近于 Mankiw, D. Romer 与 Weil (1992)的工作.

A. 模型描述

类似于Solow 模型，采用如下生产函数 $Y = F(K,H,L)$，$F(\cdot)$ 是1次齐次的，且 $f(k,h) \triangleq F(k,h,1)$ 满足条件：

$$\begin{cases} f_1 > 0,\ f_2 > 0,\ f > kf_1 + hf_2; \\ f_{11} < 0,\ f_{11}f_{22} > f_{12}^2; \\ f(tk,th)\,|_{t=0} = f_i(tk,th)\,|_{t=\infty} = 0, \\ f(tk,th)\,|_{t=\infty} = f_i(tk,th)\,|_{t=0} = \infty, \quad (i = 1,2) \end{cases} \tag{10}$$

其中 $f_1 = f_k(k,h)$，f_2，f_{11} 等仿此；$k,h > 0$. 不妨仍称如上的 $F(\cdot)$ 为新古典生产函数. 与式(2)相当的Cobb-Douglas 生产函数是

$$F(K,H,L) = AK^{\alpha}H^{\beta}L^{1-\alpha-\beta},$$

其中 $A,\alpha,\beta > 0$，$\alpha + \beta < 1$. 对于Cobb-Douglas 生产函数，可直接看出 $f(k,h) = Ak^{\alpha}h^{\beta}$ 满足条件(10).

其次，要素增长方程(4)现在被代以方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}K = (s_K Y - \delta_K K)\mathrm{d}t + K\mathrm{d}u_K, & (11\mathrm{a}) \\ \mathrm{d}H = (s_H Y - \delta_H H)\mathrm{d}t + H\mathrm{d}u_H, & (11\mathrm{b}) \\ \mathrm{d}L = L(n\mathrm{d}t + \mathrm{d}u_L), & (11\mathrm{c}) \end{cases}$$

其中 $s_K, s_H \in (0,1)$，$s_K + s_H < 1$，$\delta_K, \delta_H \in [0,1]$，这些参数的意义是自明的；$\mathrm{d}u_K$，$\mathrm{d}u_H$ 与 $\mathrm{d}u_L$ 均为Brown 运动.

类似于对Solow 模型所作的，令 $k = K/L$，$h = H/L$，利用3.1 节式(28)将方程组(11)转化为关于 k,h 的方程组：

$$\begin{cases} \mathrm{d}k = [s_K f(k,h) - \mu_K k]\mathrm{d}t + k\mathrm{d}v, \\ \mathrm{d}h = [s_H f(k,h) - \mu_H h]\mathrm{d}t + h\mathrm{d}w, \end{cases} \tag{12}$$

其中

$$\begin{cases} \mu_K = n + \delta_K + \sigma_{KL} - \sigma_L^2, \\ \mu_H = n + \delta_H + \sigma_{HL} - \sigma_L^2, \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}u_K - \mathrm{d}u_L, \quad \mathrm{d}w = \mathrm{d}u_H - \mathrm{d}u_L. \end{cases} \tag{13}$$

方程组(12)就是与式(5)对应的SDE. 若 $\sigma_K^2 = \sigma_H^2 = \sigma_L^2 = 0$，即随机扰动消失，则SDE(12)退化为ODE 系统

$$\begin{cases} \dot{k} = s_K f(k,h) - (n + \delta_K)k, \\ \dot{h} = s_H f(k,h) - (n + \delta_H)h. \end{cases} \tag{12$'$}$$

方程组(12)′就是熟知的确定性人力资本模型的微分方程组.

B. 稳定性分析

将4.1.1B 中对方程(5)所作的分析用于方程组(12)，亦可得出某些类似于Solow 模型的结论. 但这些都是平凡的，不必详述. 下面集中考虑关系重大的稳

定性问题.

对于ODE 系统(12)′,结论是相对简单的:只要 $n+\delta_i>0(i=K,H)$,系统就有唯一的正均衡点 (k^*,h^*)(但并无显式表达),对于系统的任何有正起点 $(k(0),h(0))$ 的解 $(k(t),h(t))$,均有

$$(k(t),h(t))\to(k^*,h^*)\quad(t\to\infty).$$

在条件(10)的基础上证明以上结论,是一个标准的ODE 问题.

一旦将随机扰动引入系统,情况就复杂了.如同处理Solow 模型一样,今用3.2.3C中的方法来分析方程(12)的零解的稳定性.为便于应用3.2 节中的条件(38)与条件(39),首先将系统(12)改写成如下的向量方程形式:

$$\mathrm{d}\begin{bmatrix}k\\h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_Kf-\mu_Kk\\s_Hf-\mu_Hh\end{bmatrix}\mathrm{d}t+\begin{bmatrix}k&0\\0&h\end{bmatrix}\mathrm{d}\begin{bmatrix}v\\w\end{bmatrix},\tag{12}''$$

其中 $f=f(k,h)$. 将式(12)″与3.2 节中的标准形式的方程(27)对照,此处与3.2节方程(27)中的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},\boldsymbol{u}$ 相当的分别为

$$\begin{bmatrix}k\\h\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}s_Kf-\mu_Kk\\s_Hf-\mu_Hh\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}k&0\\0&h\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}v\\w\end{bmatrix}.$$

其次,与3.2 节式(38)、式(39)中的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 相当的矩阵是

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}p&r\\r&q\end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{cases}p=\sigma_v^2=\sigma_K^2-2\sigma_{KL}+\sigma_L^2,\\q=\sigma_w^2=\sigma_H^2-2\sigma_{HL}+\sigma_L^2,\\r=\sigma_{vw}=\sigma_{KH}-\sigma_{KL}-\sigma_{HL}+\sigma_L^2.\end{cases}\tag{14}$$

于是3.2 节式(38)、式(39)中的 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\mathrm{tr}[\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\Sigma}]$ 与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$ 分别对应

$$(s_Kk+s_Hh)f-\mu_Kk^2-\mu_Hh^2,$$

$$pk^2+qh^2,$$

$$pk^4+2rk^2h^2+qh^4.$$

取 $D=\{(k,h):k,h>0\}$. 依据已指明的对应关系,现在不难将3.2 节中的条件(38)与条件(39)改写成适合于方程(12)的形式:

$$\sup_{k,h>0}A(k,h)<\inf_{k,h>0}B(k,h);\tag{15}$$

$$\inf_{k,h>0}A(k,h)>\sup_{k,h>0}B(k,h),\tag{16}$$

其中

$$\begin{cases}A(k,h)=\dfrac{2f(k,h)(s_Kk+s_Hh)+(p-2\mu_K)k^2+(q-2\mu_H)h^2}{k^2+h^2},&(17\text{a})\\[2ex]B(k,h)=\dfrac{2(pk^4+2rk^2h^2+qh^4)}{(k^2+h^2)^2}.&(17\text{b})\end{cases}$$

今进一步将条件(15)与条件(16)具体化，而关键在于求出其中的sup 与inf. 首先注意

$$A(k,tk)=\frac{2f(k,tk)}{k}\frac{s_K+ts_H}{1+t^2}+\frac{p-2\mu_K+t^2(q-2\mu_H)}{1+t^2};$$

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(k,tk)}{k}=\infty,\quad \lim_{k\to\infty}\frac{f(k,tk)}{k}=0.\quad (用式(10),t>0)$$

由此推出

$$\sup_{k,h>0}A(k,h)=\sup_{k,t>0}A(k,tk)=\infty;$$

$$\inf_{k,h>0}A(k,h)=\inf_{t>0}\frac{p-2\mu_K+t^2(q-2\mu_H)}{1+t^2}$$
$$=(p-2\mu_K)\wedge(q-2\mu_H),$$

此处及以后均采用约定记号：

$$\begin{cases}a\wedge b=\min\{a,b\}=\dfrac{1}{2}(a+b-|a-b|),\\ a\vee b=\max\{a,b\}=\dfrac{1}{2}(a+b+|a-b|).\end{cases}\tag{18}$$

类似地，

$$\sup_{k,h>0}B(k,h)=\sup_{k,t>0}B(k,k\sqrt{t})=2\sup_{t>0}\varphi(t),$$

其中 $\varphi(t)=(1+t)^{-2}(p+2rt+qt^2)$. 因 $\varphi(0)=p,\varphi(\infty)=q$,

$$\varphi'(t)=0\Rightarrow t=(p-r)/(q-r)\triangleq t_0,$$

故 $\sup\limits_{t>0}\varphi(t)=\max\{p,q,\varphi_0\}$，其中

$$\varphi_0=\varphi(t_0)=\frac{p(q-r)^2+2r(p-r)(q-r)+q(p-r)^2}{(p+q-2r)^2}\quad(0<t_0<\infty).$$

当 $t_0\overline{\in}(0,\infty)$ 时不必用 φ_0，直接有

$$\sup_{t>0}\varphi(t)=p\vee q.$$

在这种情况下，可置 $\varphi_0=p$.

综合以上结果得出：条件(15)必不满足，而条件(16)相当于

$$(p-2\mu_K)\wedge(q-2\mu_H)>2\max\{p,q,\varphi_0\}.\tag{19}$$

于是应用3.2.3C 中的判别法得到：

命题 设条件(19)满足，$(k(t),h(t))$ 是方程组(12)的解，$k(0),h(0)>0$，则以下两结论必有一个成立：

(i) 当 $t\to\infty$ 时 $|k(t)|^2+|h(t)|^2$ 几乎必然指数增长至无穷；

(ii) $(k(t),h(t))$ 的轨道以正概率逸出第一象限.

注意，无论是 $k=0$ 还是 $h=0$，都意味着生产中止. 故不妨将上述命题简略地表达为：在条件(19)之下，有正起点的经济要么濒于崩溃，要么最终呈指数增

长. 这样的结论无疑是令人感兴趣的，它并不易从常识判断得出.

然而，我们还无法陶醉于有点令人惊异的上述结论，因为尚不清楚条件(19)在什么情况下满足. 考虑到表达 $\mu_K,\mu_H,p,q,r,\varphi_0$ 的式子(式(13)、式(14)等)的复杂性，很难对条件(19)作出一个直接解释. 因此，我们只能考虑那些能使式(19)大大简化的特殊情况.

首先考虑 K,H,L 三者之中仅有一个受到扰动的极端情况. 若 $\sigma_K^2>0,\sigma_H^2=\sigma_L^2=0$，则

$$\mu_K=n+\delta_K,\mu_H=n+\delta_H,p=\sigma_K^2,q=r=0.\quad (用式(13)、式(14))$$

此时条件(19)简化为

$$(\sigma_K^2-2\mu_K)\wedge(-2\mu_H)>2\sigma_K^2,$$

而这显然不可能满足. 当 $\sigma_H^2>0,\sigma_K^2=\sigma_L^2=0$ 时有同样结论. 但是，若 $\sigma_L^2>0,\sigma_K^2=\sigma_H^2=0$，则

$$\mu_K=n+\delta_K-\sigma_L^2,\ \mu_H=n+\delta_H-\sigma_L^2,\ p=q=r=\sigma_L^2.\quad (用式(13)、式(14))$$

以此代入式(19)，得到

$$(3\sigma_L^2-2n-2\delta_K)\wedge(3\sigma_L^2-2n-2\delta_H)>2\sigma_L^2,$$

即

$$\sigma_L^2>2n+2(\delta_K\vee\delta_H).\tag{20}$$

由此可见，只要 σ_L^2 相对于 n,δ_K,δ_H 适当大，就能使前述命题的结论成立.

其次考虑如下特殊情况：$\mathrm{d}u_K,\mathrm{d}u_H,\mathrm{d}u_L$ 互不相关，且 $\delta_K=\delta_H=\delta$，则

$$\mu_K=n+\delta-\sigma_L^2=\mu_H;\quad (用式(13))$$

$$p=\sigma_K^2+\sigma_L^2,q=\sigma_H^2+\sigma_L^2,r=\sigma_L^2;\quad (用式(14))$$

$$\varphi_0=(\sigma_K^2\sigma_H^2+\sigma_H^2\sigma_L^2+\sigma_K^2\sigma_L^2)/(\sigma_K^2+\sigma_H^2).$$

于是 $\max\{p,q,\varphi_0\}=\sigma_L^2+(\sigma_K^2\vee\sigma_H^2)$，条件(19)简化为

$$\sigma_L^2-2n-2\delta>2(\sigma_K^2\vee\sigma_H^2)-(\sigma_K^2\wedge\sigma_H^2),$$

即

$$2\sigma_L^2>4n+4\delta+\sigma_K^2+\sigma_H^2+3|\sigma_K^2-\sigma_H^2|.\quad (用式(18))\tag{20$'$}$$

由此可见，只要 σ_L^2 相对于 $n,\delta,\sigma_K^2,\sigma_H^2$ 适当大，同样使前述命题的结论成立.

注意：条件(20)、条件(20)′均与条件(9)相当，它们都表明对于 L 偏强的扰动能显著提升经济的增长，而对资本的扰动却不能起类似作用. 这是很值得注意的.

4.1.3 R&D 模型

前面两个模型忽略了技术因素，而技术在现代经济成长中无疑起着举足轻重的作用. 从定量分析的角度考虑，技术的作用非常复杂，难以给出完全而严格的描述. 首先，技术水平 A 的量化就绝不是一件简单的事情，我们只是假定这种

量化已经实现了,因而 A 是一个可测定的时变量. 至于其具体测定方法,则是值得专门研究的另一个问题. 其次,除了似乎无足轻重的单个个人之外,任何经济体都会或多或少对技术进步作出一定贡献,因而技术与其他经济变量的作用本质上是相互的,但仅当考虑某个足够大的经济体(例如全球经济)时,才值得将技术 A 作为模型的内生变量. 在某种意义上,技术同时具有生产要素与产品的某些特征. 作为一种产品看,技术的产出无疑遵循比物质生产更复杂的规则;但为得到某种便于分析的模型,我们不得不采用高度简化的假设:技术要么是专门的研发(R&D)部门的**产品**,要么是所有生产过程的**副产品**. 这两种假设导向两个颇不相同的模型:R&D 模型与边干边学模型,我们在本小节与下小节中分别考虑这两个模型的随机形式.

A. 模型描述

设经济由生产部门与研发部门组成,二者分别生产物质产品与开发技术,其生产函数分别为:

$$Y = C_Y K^{\alpha}(AL)^{\alpha'}, \tag{21}$$

$$\psi_A = C_A K^{\xi} A^{\theta} L^{\eta}. \tag{22}$$

其中 C_Y, C_A 是正常数, $0<\alpha<1, \alpha'=1-\alpha, \xi, \eta \geqslant 0, \xi+\eta>0$, 对常数 θ 暂不加限制. 在生产过程中,要素 K, L 在生产部门与 R&D 部门按固定比例配置,这些比例已吸收进系数 C_Y 与 C_A 中而未直接表现出来.

与确定性模型相比,需要强调的一个关键差别是,此处应将 Y 理解为平均产出(或期望产出),而将 ψ_A 理解为技术的平均增长率,因而 ψ_A 仅作为一个整体记号使用(关于记号参看 3.2.1D),并不像确定性模型中一样界定为 $\dot{A}/A$ ($\dot{A}$ 未必有意义!). 类似地,以 ψ_K 表 K 的平均增长率,且假定 $\psi_K = s(Y/K), s \in (0,1)$ 是常数储蓄率. 与式(3)对照,此处略去了资本折旧. 为简便起见,下面约定 $x = \psi_A, y = \psi_K$.

类比于式(11),设 A, K, L 服从如下随机增长方程:

$$\begin{cases} \mathrm{d}A = A(x\mathrm{d}t + \mathrm{d}u_A), \\ \mathrm{d}K = K(y\mathrm{d}t + \mathrm{d}u_K), \\ \mathrm{d}L = L(n\mathrm{d}t + \mathrm{d}u_L), \end{cases} \tag{23}$$

其中 n 是非负常数, $\mathrm{d}u_A, \mathrm{d}u_K, \mathrm{d}u_L$ 是 Brown 运动;为简便起见,假定它们互不相关. 尽管方程组(23)中的三个方程在形式上呈现出很完美的对称性,但应注意 x, y 不同于 n, 并非常数.

现在利用式(21)~式(23)导出关于 x, y 的 SDE,关键的步骤是应用 3.1 节式(24)计算 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}(C_A K^{\xi} A^{\theta} L^{\eta})}{x}$$

$$
\begin{aligned}
&= \xi \frac{\mathrm{d}K}{K} + \theta \frac{\mathrm{d}A}{A} + \eta \frac{\mathrm{d}L}{L} - \frac{\xi\xi'}{2}\left(\frac{\mathrm{d}K}{K}\right)^2 - \frac{\theta\theta'}{2}\left(\frac{\mathrm{d}A}{A}\right)^2 \\
&\quad - \frac{\eta\eta'}{2}\left(\frac{\mathrm{d}L}{L}\right)^2 + \xi\theta \frac{\mathrm{d}K}{K}\frac{\mathrm{d}A}{A} + \xi\eta \frac{\mathrm{d}K}{K}\frac{\mathrm{d}L}{L} + \theta\eta \frac{\mathrm{d}A}{A}\frac{\mathrm{d}L}{L} \\
&= (\theta x + \xi y + p)\mathrm{d}t + \mathrm{d}v, \qquad \text{(用式(23))}
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{cases}
p = n\eta - \frac{1}{2}(\theta\theta'\sigma_A^2 + \xi\xi'\sigma_K^2 + \eta\eta'\sigma_L^2), \\
\mathrm{d}v = \theta \mathrm{d}u_A + \xi \mathrm{d}u_K + \eta \mathrm{d}u_L.
\end{cases} \tag{24}
$$

类似地，可算出

$$
y^{-1}\mathrm{d}y = (\alpha' x - \alpha' y + q)\mathrm{d}t + \mathrm{d}w,
$$

$$
\begin{cases}
q = \alpha' n - \frac{\alpha'}{2}[\alpha\sigma_A^2 + (\alpha - 2)\sigma_K^2 + \alpha\sigma_L^2], \\
\mathrm{d}w = \alpha'(\mathrm{d}u_A - \mathrm{d}u_K + \mathrm{d}u_L).
\end{cases} \tag{25}
$$

这就得到关于 x,y 的 SDE 系统：

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}x = x[(\theta x + \xi y + p)\mathrm{d}t + \mathrm{d}v], \\
\mathrm{d}y = y[(\alpha' x - \alpha' y + q)\mathrm{d}t + \mathrm{d}w].
\end{cases} \tag{26}
$$

若 $\mathrm{d}v = 0 = \mathrm{d}w$，即随机扰动消失，则方程组(26)退化为ODE 系统：

$$
\begin{cases}
\dot{x} = x(\theta x + \xi y + n\eta), \\
\dot{y} = \alpha' y(x - y + n).
\end{cases} \tag{26$'$}
$$

方程组(26)′正是确定性R&D 模型的微分方程组，这种模型在稍不同的形式下先后由 P. M. Romer(1990)，Grossman 与 Helpman(1991)，Aghion 与 Howitt (1992)等提出与研究.

B. 稳定性分析

首先指出，关于确定性系统(26)′有以下结果.

(i) 若 $\theta + \xi < 0 < n$，则系统(26)′有唯一正均衡点 (x^*, y^*)，其中

$$
x^* = -\frac{n(\eta + \xi)}{\theta + \xi}, \quad y^* = \frac{n(\theta - \eta)}{\theta + \xi},
$$

(x^*, y^*) 在第一象限内是全局渐近稳定的.

(ii) 若 $\theta + \xi > 0$ 或 $\theta + \xi = 0 < n$，则系统(26)′无正均衡点，系统在第一象限内的轨道最终均进入介于直线

$$
\theta x + \xi y + n\eta = 0 \text{ 与 } x - y + n = 0
$$

之间的区域，然后趋向无穷.

(iii) 若 $\theta + \xi = 0 = n$，则系统(26)′在第一象限内的所有轨道均收敛于直线 $y = x$ 上某点.

以上结论的严格证明并不简单，但仍属于标准的ODE 问题，此处不拟细述.

我们的主要兴趣是SDE(26)的零解的稳定性，这需要运用类似于4.1.2B的方法.

如同在4.1.2B中一样，首先将系统(26)改写为

$$\mathrm{d}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(\theta x+\xi y+p)\\y(\alpha' x-\alpha' y+q)\end{bmatrix}\mathrm{d}t+\begin{bmatrix}x & 0\\0 & y\end{bmatrix}\mathrm{d}\begin{bmatrix}v\\w\end{bmatrix}.$$

这就可将3.2节中的条件(38)与条件(39)分别写成(对照式(15)、式(16))

$$\sup_{x,y>0} A(x,y) < \inf_{x,y>0} B(x,y), \tag{27}$$

$$\inf_{x,y>0} A(x,y) > \sup_{x,y>0} B(x,y), \tag{28}$$

其中

$$A(x,y) = (\theta x^3 + \xi x^2 y + \alpha' xy^2 - \alpha' y^3 + \lambda x^2 + \mu y^2)/(x^2 + y^2),$$

$$B(x,y) = (\sigma_v^2 x^4 + 2\sigma_{vw} x^2 y^2 + \sigma_w^2 y^4)(x^2 + y^2)^{-2},$$

$$\lambda = p + \sigma_v^2/2,\ \mu = q + \sigma_w^2/2,$$

$$\sigma_v^2 = \theta^2\sigma_A^2 + \xi^2\sigma_K^2 + \eta^2\sigma_L^2, \qquad \text{(用式(24))}$$

$$\sigma_w^2 = \alpha'^2(\sigma_A^2 + \sigma_K^2 + \sigma_L^2), \qquad \text{(用式(25))}$$

$$\sigma_{vw} = \alpha'(\theta\,\sigma_A^2 - \xi\,\sigma_K^2 + \eta\,\sigma_L^2). \qquad \text{(用式(24)、式(25))}$$

注意到 $B(x,y)$ 与 $B(k,h)$ (依式(17b))有同样的结构，套用4.1.2B中的结果得出：

$$\sup_{x,y>0} B(x,y) = \max\{\sigma_v^2,\sigma_w^2,\varphi_0\},$$

$$\inf_{x,y>0} B(x,y) = \min\{\sigma_v^2,\sigma_w^2,\varphi_0\};$$

$$\varphi_0 = \varphi(t_0),\quad \varphi(t) = B(1,\sqrt{t}),\quad t_0 = \frac{\sigma_v^2 - \sigma_{vw}}{\sigma_w^2 - \sigma_{vw}} \in (0,\infty);$$

当 $t_0 \overline{\in} (0,\infty)$ 时取 $\varphi_0 = \sigma_v^2$. 其次，对 $t,x>0$ 有

$$A(x,tx) = \frac{x(\theta + \xi t + \alpha' t^2 - \alpha' t^3)}{1+t^2} + \frac{\lambda + \mu t^2}{1+t^2} \triangleq xg(t) + h(t).$$

容易看出

$$\sup_{t>0} h(t) = \lambda \vee \mu,\quad \inf_{t>0} h(t) = \lambda \wedge \mu.$$

但 $g(t)$ 的情况较复杂，很难作一个完全的讨论，下面考虑若干特殊情况.

(i) 设参数 α,θ,ξ 的选择已保证 $g(t)\leqslant 0(\forall\, t>0)$，$\lambda\vee\mu>0$，则

$$\sup_{x,y>0} A(x,y) = \sup_{x,t>0}[xg(t) + h(t)] = \sup_{t>0} h(t) = \lambda \vee \mu.$$

于是条件(27)相当于

$$\lambda \vee \mu < \min\{\sigma_v^2,\sigma_w^2,\varphi_0\}. \tag{29}$$

当条件(29)满足时，系统(26)起于第一象限内的解要么a.s.指数衰减于零，要么以正概率逸出第一象限. 至于条件(29)以及 $g(t)\leqslant 0(\forall\, t>0)$ 的具体化，则仍然是一个很复杂的问题，需要非常细致的讨论.

(ii) 设 $\theta+\xi>0$，则 $g(1)=(\theta+\xi)/2>0$，于是有 t_1,t_2，使得 $0\leqslant t_1<1<t_2<\infty$，在区间 $[t_1,t_2]$ 上 $g(t)\geqslant 0$. 令

$$D=\{(x,y):x,y>0,t_1\leqslant y/x\leqslant t_2\}, \tag{30}$$

则

$$\inf_{(x,y)\in D}A(x,y)=\inf\{A(x,tx):x>0,t_1\leqslant t\leqslant t_2\}$$
$$\geqslant \inf_{t_1\leqslant t\leqslant t_2}h(t)\geqslant \lambda\wedge\mu.$$

于是从条件

$$\lambda\wedge\mu>\max\{\sigma_v^2,\sigma_w^2,\varphi_0\} \tag{31}$$

可推出

$$\inf_{(x,y)\in D}A(x,y)>\sup_{(x,y)\in D}B(x,y).$$

这就得到：

命题　设 $\theta+\xi>0$ 且条件(31)满足，$(x(t),y(t))$ 是系统(26)的解，$(x(0),y(0))\in D$,D 依式(30),则以下两结论必有一个成立：

(a) 当 $t\to\infty$ 时 $x(t)$ 与 $y(t)$ 几乎必然呈指数增长.

(b) $(x(t),y(t))$ 的轨道以正概率逸出扇形区域 D.

以上结论与系统(26)′在 $\theta+\xi>0$ 时的情况是接近的,只是现在附加了条件(31). 令人遗憾的是,在一般情况下,我们很难看出条件(31)如何能被满足.

(iii) 考虑如下特殊情况:设

$$\theta+\xi>0,\quad 0<\eta<\alpha',\quad \alpha<1/2,n>0;$$
$$\sigma_L^2>0,\quad \sigma_A^2=\sigma_K^2=0,$$

则

$$p=n\eta-\frac{\eta\eta'}{2}\sigma_L^2,\quad q=n\alpha'-\frac{\alpha\alpha'}{2}\sigma_L^2;\qquad (\text{用式(24)、式(25)})$$

$$\sigma_v^2=\eta^2\sigma_L^2,\quad \sigma_w^2=\alpha'^2\sigma_L^2,\quad \sigma_{vw}=\alpha'\eta\sigma_L^2;$$

$$\lambda=n\eta+\frac{\eta(2\eta-1)}{2}\sigma_L^2,\quad \mu=n\alpha'+\frac{\alpha'(2\alpha'-1)}{2}\sigma_L^2;$$

$$t_0=\frac{\eta^2-\alpha'\eta}{\alpha'^2-\alpha'\eta}=-\frac{\eta}{\alpha'}<0,\quad \varphi_0=\sigma_v^2.$$

因在给定条件下有 $\lambda\wedge\mu=\lambda,\sigma_v^2\vee\sigma_w^2=\sigma_w^2$，故条件(31)相当于 $\lambda>\sigma_w^2$，即

$$2n\eta>(2\alpha'^2-2\eta^2+\eta)\sigma_L^2.$$

由此可见,在给定的参数条件下,当 σ_L^2 适当小时,前述命题的结论成立. 反之,若 σ_L^2 很大,则可能使对确定性系统(26)′成立的结论变得不再成立. 这就在另一种形式下显示出劳动力扰动的突出影响.

4.1.4 边干边学模型

在确定性形式下，以下所描述的模型最早由 Arrow 于1962年提出.

A. 模型描述

现在对R&D模型作如下修正：技术开发不是在独立的R&D部门中进行，而是作为生产部门的副产品出现. 这意味着，每个生产单元对技术进步都作出了贡献，且贡献量取决于其产出水平. 因此，不妨将技术水平 A 表为资本存量 K 的函数：$A = A(K)$. 无疑，$A(\cdot)$ 本质上是高度复杂的；但作为一个初步近似，我们选择便于分析的简单函数：$A = BK^{\xi}$，B 与 ξ 是正常数. 产出 Y 依然依式(21). 将 $A = BK^{\xi}$ 代入式(21)得

$$Y = B_1 K^{\alpha+\alpha'\xi} L^{\alpha'}, \quad B_1 = C_Y B^{\alpha'} > 0. \tag{32}$$

$y = \psi_K$ 仍表资本的期望增长率. 对于 K 与 L 的增长，保持式(23)中的后两个方程，但现在不假定 du_K 与 du_L 互不相关. 利用 $y = sY/K$，式(32)与(23)，依类似4.1.3A 中的计算得出

$$dy = \alpha' y[(-\xi' y + p)dt + dv], \tag{33}$$

其中

$$p = n + \frac{\xi'(\alpha'\xi' + 1)}{2}\sigma_K^2 - \frac{\alpha}{2}\sigma_L^2 - \alpha'\xi'\sigma_{KL},$$

$$dv = -\xi' du_K + du_L,$$

$$\sigma_v^2 = \xi'^2\sigma_K^2 - 2\xi'\sigma_{KL} + \sigma_L^2.$$

式(33)就是我们所需要的SDE. 若 $dv = 0$，则式(33)退化为确定性边干边学模型的微分方程：

$$\dot{y} = \alpha' y(-\xi' y + n). \tag{33$'$}$$

B. 稳定性分析

因式(33)是一个一维系统，对之容易作出较全面的分析. 首先考虑方程(33)′. 若 $0 < \xi < 1$，$n > 0$，则方程(33)′有唯一正均衡点 $y^* = n/\xi'$，且 y^* 在区间 $(0,\infty)$ 内是全局渐近稳定的. 若 $\xi > 1$，或 $\xi = 1$，$n > 0$，则方程(33)′的任何有正起点的解均无界增长. 若 $\xi = 1$，$n = 0$，则方程(33)′退化为 $\dot{y} = 0$，$y = \text{const}$. 以上结果在确定性增长理论中是熟知的. 对于SDE(33)，情况要稍复杂些.

SDE(33)显然有零解，今讨论其零解的稳定性. 取 $D = (0,\infty)$，将3.2节式(40)与式(41)用于方程(33)分别得到

$$\sup_{y>0}[2(p - \xi' y) + \alpha'\sigma_v^2] < 2\alpha'\sigma_v^2$$

与

$$\inf_{y>0}[2(p - \xi' y) + \alpha'\sigma_v^2] > 2\alpha'\sigma_v^2.$$

经整理后，以上条件可分别简化为

$$\inf_{y>0} \xi' y > q \tag{34}$$

与

$$\sup_{y>0} \xi' y < q, \tag{35}$$

其中

$$q = p - \frac{\alpha'}{2}\sigma_v^2 = n + \frac{1}{2}(\xi'\sigma_K^2 - \sigma_L^2).$$

下面分几种情况讨论.

(i) 设 $0 < \xi < 1$，则 $\xi' > 0$，条件(35)必不满足，而条件(34)相当于 $q < 0$，即

$$\sigma_L^2 > 2n + \xi'\sigma_K^2. \tag{36}$$

这就得出结论：若 $0<\xi<1$，σ_L^2 相对于 n 与 σ_K^2 适当大（这相当于 L 的扰动偏大），则 ψ_K 几乎必然从任何正起点指数衰减至零，即经济迅速趋于零增长状态. 值得注意的是，当 $0<\xi<1$，$n>0$ 时，方程(33)′的零解并非稳定；而适当的干扰可使零解变成稳定.

(ii) 设 $\xi = 1$，则条件(34)与条件(35)分别简化为 $q<0$ 与 $q>0$. 因当 $\xi = 1$ 时 $q = n - \sigma_L^2/2$，故 $q<0$ 与 $q>0$ 分别相当于 $\sigma_L^2 > 2n$ 与 $\sigma_L^2 < 2n$. 这就得出结论：若 $\xi = 1$，$\sigma_L^2 > 2n$（或 $\sigma_L^2 < 2n$），则方程(33)的任何有正起点的解均几乎必然指数衰减至零（或呈指数增长）.

实际上，当 $\xi = 1$ 时方程(33)简化为

$$\mathrm{d}y = y\left[\alpha'\left(n - \frac{\alpha}{2}\sigma_L^2\right)\mathrm{d}t + \alpha'\mathrm{d}u_L\right],$$

因而可直接求解：

$$y(t) = y(0)\exp\left[\alpha'\left(n - \frac{1}{2}\sigma_L^2\right)t + \alpha' u_L(t)\right].$$

从上述解表达式显然直接得出前述的稳定性结论.

(iii) 设 $\xi > 1$，则 $\xi' < 0$，条件(34)必不满足，而条件(35)相当于 $q > 0$，即

$$2n > \sigma_L^2 - \xi'\sigma_K^2. \tag{37}$$

这就得出结论：若 $\xi > 1$，$n > 0$，σ_L^2 与 σ_K^2 相对于 n 充分小（即 L 与 K 的扰动充分小），则方程(33)的任何有正起点的解均几乎必然呈指数增长. 特别地，当 $\xi>1$，$n>0$，$\sigma_L^2 = \sigma_K^2 = 0$ 时，如上的“指数增长”出现. 这一结论正好与对确定性边干边学模型的分析一致.

C. 平稳分布

现在仿照 4.1.1D 中的作法，求出由系统(33)决定的变量 $y(y>0)$ 的平稳分布. 仍用 3.2 节中的式(50)、式(51)，与那里的 f, g 相当的是 $\alpha' y(p - \xi' y)$，

$\alpha' y$. 首先算出：

$$\varphi(x)=\int_1^x \frac{p-\xi' y}{\alpha' y\sigma_v^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{\alpha'\sigma_v^2}(p\ln x-\xi' x+\xi').$$

以 $\pi(y)$ 记所求的平稳分布，则

$$\frac{1}{\pi(y)}=\int_0^\infty \frac{y^2}{x^2}\mathrm{e}^{2\varphi(x)-2\varphi(y)}\mathrm{d}x \qquad (\text{用 3.2 节式(51)})$$

$$=y^2\mathrm{e}^{-2\varphi(y)}\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\exp\left[\frac{2p}{\alpha'\sigma_v^2}\ln x-\frac{2\xi'}{\alpha'\sigma_v^2}(x-1)\right]\mathrm{d}x$$

$$=y^2\mathrm{e}^{\beta-2\varphi(y)}\int_0^\infty x^{-\omega'}\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x \qquad \left(\beta=\frac{2\xi'}{\alpha'\sigma_v^2},\omega=\frac{2p}{\alpha'\sigma_v^2}-1\right)$$

$$=\beta^{-\omega}\Gamma(\omega)y^{\omega'}\mathrm{e}^{\beta y},$$

故得

$$\pi(y)=[\beta^{\omega}/\Gamma(\omega)]y^{-\omega'}\mathrm{e}^{-\beta y}\quad(y>0). \tag{38}$$

为使 $\pi(y)$ 有意义，必需 $\beta,\omega>0$，这相当于

$$0<\xi<1,\quad 2n+\xi'\sigma_K^2>\sigma_L^2, \tag{39}$$

其中后一不等式恰与式(36)相反. 若 $\sigma_K^2=\sigma_L^2=0$，则以上条件正是确定性系统(33)′存在唯一正均衡点的条件.

下面设条件(39)满足，$\pi(y)$ 依式(38)，今考察均衡值 $y^*=n/\xi'$ 与平稳值 $\bar{y}$ 的关系. 首先算出 $\bar{y}$：

$$\bar{y}=\mathrm{E}y=\int_0^\infty y\pi(y)\mathrm{d}y=\int_0^\infty \frac{\beta^{\omega}}{\Gamma(\omega)}y^{\omega}\mathrm{e}^{-\beta y}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\Gamma(\omega+1)}{\beta\Gamma(\omega)}=\frac{\omega}{\beta}=\frac{2p-\alpha'\sigma_v^2}{2\xi'}$$

$$=\frac{2n+\xi'\sigma_K^2-\sigma_L^2}{2\xi'}=y^*+\frac{\xi'\sigma_K^2-\sigma_L^2}{2\xi'}.$$

于是有以下结论.

(i) 若 $\xi'\sigma_K^2>\sigma_L^2$（特别若 $\sigma_K^2>0=\sigma_L^2$），则 $\bar{y}>y^*$；这意味着，资本积累出现较大的冲击会使资本存量的平稳增长率从确定性条件下的均衡增长率上移.

(ii) 若 $\xi'\sigma_K^2<\sigma_L^2$（特别若 $\sigma_K^2=0<\sigma_L^2<2n$），则 $\bar{y}<y^*$；这意味着，劳动力供应出现较大的冲击会使资本的平稳增长率从均衡增长率下移.

(iii) 若 $\xi'\sigma_K^2=\sigma_L^2$（特别若 $\sigma_K^2=0=\sigma_L^2$，即扰动消失），则资本的平稳增长率重合于确定性模型的均衡增长率.

以上结论与4.1.1D 中的结果是类似的.

参考文献

[1] Abel A B, Bernanke B S. Macroeconomics [M]. 2nd ed., New York:

Addison-Wesley,1995.

[2] Aghion P, Howitt P. A model of growth through creative destruction [J]. Econometrica,1992,60:323-351.

[3] Arrow K J. The economic implications of learning by doing[J]. Rev. Eco. Studies,1962,29:155-173.

[4] Azariadis C, Drazen A. Threshold externalities in economic development [J]. Q. J. Eco. ,1990,105:501-526.

[5] Barro R J. Economic growth in a cross section of countries[J]. Q. J. Eco. ,1991,106:407-443.

[6] Barro R J, Xavier Sala-i-Martin. Convergence[J]. J. Political Eco. ,1992, 100:223-251.

[7] Barro R J. Xavier Sala-i-Martin. Economic Growth[M]. New York: McGraw-Hill,Inc. ,1995.

[8] Baumol W J. Productivity growth, convergence and welfare: what the long-run data show[J]. Amer. Eco. Rev. ,1986,76:1072-1085.

[9] Becke G S, Murphy K M, Tamura R. Human capital, fertility and economic growth[J]. J. Political Eco. ,1990,98:12-37.

[10] Blackburn K. Can stabilisation policy reduce long-run growth[J]? Eco. J. ,1999,109:67-77.

[11] Bourguignon F. A particular class of continuous-time stochastic growth models[J]. J. Eco. Theory,1974,9:141-158.

[12] Cass D. Optimal growth in an aggregative model of capital accumulation [J]. Rev. Eco. Studies,1965,32:233-240.

[13] Dinopoulos E, Thompson P. Schumpeterian growth without scale effects[J]. J. Eco. Growth,1998,3:313-335.

[14] Eicher T S, Turnovsky S J. Convergence speeds and transition dynamics in non-scale growth models[J]. J. Eco. Growth,1994,4:413-428.

[15] Evans G W, Honkapohja S, Romer P. Growth cycles[J]. Amer. Eco. Rev. ,1998,88:495-515.

[16] 龚六堂. 经济增长理论[M]. 武汉:武汉大学出版社,2000.

[17] Grossman G M, Helpman E. Innovation and growth in the global economy[M]. Cambridge:MIT Press,1991.

[18] Howitt P. Steady endogenous growth with population and R&D inputs growth[J]. J. Political Eco. ,1999,107:715-730.

[19] 胡适耕,吴付科.宏观经济的数理分析[M].北京:科学出版社,2004.

[20] Jones C I. R&D-based models of economic growth[J]. J. Political Eco. , 1995,103:759-784.

[21] Judd K L. Projection methods for solving aggregate growth models[J]. J. Eco. Theor. ,1992,58:410-452.

[22] King R G, Rebelo S. Transitional dynamics and economic growth in the neoclassical model[J]. Amer. Eco. Rev. ,1993,83:908-931.

[23] Kurz M. Optimal economic growth and wealth effects[J]. Intern. Eco. Rev. ,1968,9:348-357.

[24] Ladron-de-Guevara A,Ortigueira S, Santos M. A two-sector model of endogenous growth with leisure[J]. Rev. Eco. Studies, 1999, 66: 609-632.

[25] Lucas R E. On the mechanics of economic development[J]. J. Monetary Eco. ,1988,22:3-42.

[26] Malliaris A G, Brock W A. Stochastic Methods in Economics and Finance[M]. Amsterdam:North-Holland,1982.

[27] Mankiw N G, Romer D, Weil D N. A contribution to the empirics of the economic growth[J]. Q. J. Eco. ,1992,107:407-437.

[28] Martin P, Rogers C A. Long term growth and short-term economic instability[J]. European Eco. Rev. ,2000,44:359-381.

[29] Merton R. An asymptotic theory of growth under uncertainty[J]. Rev. Eco. Studies,1975,42:375~393.

[30] Peretto P F. Technological change and population growth[J]. J. Eco. Growth,1998,3:283-311.

[31] Rebelo S. Long-run policy analysis and long-run growth[J]. J. Political Eco. ,1991,99:500-521.

[32] Romer P M. Increasing returns and long run growth[J]. J. Political Eco. ,1986,94:1002-1037.

[33] Romer P M. Endogenous technological change[J]. J. Political Eco. , 1990,98:71-102.

[34] Segerstrom P. Endogenous growth without scale effects[J]. Amer. Eco. Rev. ,1998,88:1290-1310.

[35] Solow R M. A contribution to the theory of economic growth[J]. Q. J. Eco. ,1956,70:65-94.

[36] Stokey N L. Are there limits to growth[J]? Intern. Eco. Rev. ,1998,39:

1-31.

[37] Turnovsky S J. Fiscal policy, elastic labor supply and endogenous growth[J]. J. Monetary Eco. ,2000,45:185-210.

[39] Yaung A. Growth without scale effects[J]. J. Political Eco. ,1998,106:41-63.

4.2 消费优化与财政政策

如同在2.3节中已提到的,消费优化决策在宏观经济分析中具有基本意义. 在连续时间形式下,消费优化模型有如下主要特点.

(i) **决策目标**:决策者(代表性消费者或社会计划者)选择长期消费计划,以最大化其折现总效用;消费者效用主要取决于消费 c, 亦可能依赖于休闲 $(1-l)$、财富拥有水平 (w)、福利性公共开支等.

(ii) **预算约束**:消费资源必须服从个体或政府的预算约束;动态约束表为某个(组)微分方程,而跨时约束通常相当于某个横截性条件.

(iii) **解的形式**:原则上,模型应确定最优消费计划及相关变量的最优轨道;至少,应求出关键变量的均衡水平或均衡增长率.

就以上特征而言,确定性的与随机的消费优化决策模型并无区别. 随机模型的特殊性在于,从最优性条件导出的SDE系统通常不存在非平凡的均衡点,更谈不上确定性模型通常所具有的鞍轨稳定性. 对于随机模型,关注的重点是消费或资本(也就是经济)的均衡增长率 ψ 与最优折现效用 V, 及这些指标对于模型参数的依赖关系. 要使这方面的分析得以展开,某些特殊设定是不可缺少的.

本节及以后, $\rho>0$ 都表示时间偏好率; $U(\cdot)$ 记效用函数,总假定它满足 $U'(\cdot)>0, U''(\cdot)<0$; 字母 c、k、y、b 分别表示消费、资本存量、产出(或收入)与政府债券余额,它们均为个体变量,相应的总体变量则记为 C、K、Y、B. 本节不涉及价格因素,因此上述变量均是实际变量.

4.2.1 Ramsey 模型

Ramsey 模型无疑是消费最优决策理论中的一个基准模型,因而自然成为本节首先讨论的对象. Ramsey 模型有多种互有差异的形式. 为展示其主要特点,下面给出它的一个最基本的形式,此形式与2.3节中讨论的离散消费模型在一定程度上相互对应.

A. 模型描述

如同在2.3.1A 中一样,代表性消费者的决策目标是,在其预算约束下选取

消费计划 $c=c(t)$，以最大化其期望折现总效用. 形式上，这归结为解如下随机最优化问题：

$$\begin{cases} \max\limits_{c} \mathrm{E}_0\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho t}U(c(t))\mathrm{d}t, & (1\mathrm{a}) \\ \mathrm{s.t.} \quad \mathrm{d}k=(rk+w-c)\mathrm{d}t+\varphi \mathrm{d}u, \quad k(0)=k_0. & (1\mathrm{b}) \end{cases}$$

问题(1)分别以 c 与 k 为其控制变量与状态变量，状态方程(1b)就是消费者的动态预算约束条件.

问题(1)的目标函数意义是清楚的，下面解释一下预算约束方程(1b). 方程(1b)中 k 表示消费者的资产(或财富)存量，它构成消费的资源. 在不存在扰动的情况下，资产积累过程服从如下动态平衡方程：

$$\text{资产增加量}(\dot{k})=\text{收入}(y)-\text{消费}(c),$$

上式两端都在单位时间内计量，其中

$$\text{收入}(y)=\text{资产收入}(rk)+\text{劳动收入}(w),$$

r 是利率. 这就得到确定性的资产积累方程：

$$\dot{k}=rk+w-c. \tag{1b$'$}$$

与方程(1b)$'$比较，方程(1b)右端多了一个扰动项 $\varphi \mathrm{d}u$，此处 $\mathrm{d}u$ 是一给定的 Brown 运动，φ则可能与 t,k 有关. $\varphi \mathrm{d}u$ 刻画了收入的波动，至于它是源于利率的波动，还是工资的波动，则是对模型的具体解释问题，并不影响下面的分析. r 与 w 可能是时变的，它们取决于市场环境，是消费者无法选择的.

约定 $R(t)=\int_0^t r(s)\mathrm{d}s$ (此处及今后均用此记号，当 r 为常数时 $R(t)=rt$). 将(1b)看作关于 k 的线性SDE，应用3.2节式(22)，解出

$$k(s)=k(t)\mathrm{e}^{R(s)-R(t)}+\int_t^s \mathrm{e}^{R(s)-R(\tau)}\{[w(\tau)-c(\tau)\mathrm{d}\tau+\varphi(\tau)\mathrm{d}u(\tau)]\} \quad (s\geqslant t).$$

上式两端同乘以 $\mathrm{e}^{-R(s)}$，然后取期望 E_t (用3.1节式(9))得

$$\mathrm{E}_t[k(s)\mathrm{e}^{-R(s)}]=k(t)\mathrm{e}^{-R(t)}+\mathrm{E}_t\int_t^s \mathrm{e}^{-R(\tau)}[w(\tau)-c(\tau)]\mathrm{d}\tau.$$

由此推出，以下两条件互相等价(参考3.2.1C)：

$$\lim_{s\to\infty}\mathrm{E}_t[k(s)\mathrm{e}^{-R(s)}]=0, \tag{2$_t$}$$

$$k(t)=\mathrm{E}_t\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{R(t)-R(s)}[c(s)-w(s)]\mathrm{d}s. \tag{3$_t$}$$

条件 $(3)_t$ 正好对应于2.3节式(6)，它用预期的未来净支出(=消费－劳动收入)表出当前资产，可以说是关于 $k(t)$ 的一个前向公式. 式 $(3)_t$ 亦可改写成：

$$k(t)+\mathrm{E}_t\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{R(t)-R(s)}w(s)\mathrm{d}s=\mathrm{E}_t\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{R(t)-R(s)}c(s)\mathrm{d}s,$$

这表明，当前资产加上预期的未来折现总收入，恰抵偿预期的未来折现总消费支

出. 因此，称条件 $(3)_t$ 为消费者的**跨时预算约束**. 另一方面，条件 $(2)_t$ 直观上意味着，预期的未来资产折现值将趋于零，这与条件 $(3)_t$ 等价是很自然的. 下面我们假定，满足跨时预算约束是问题(1)所要求的.

B. 最优性条件

因 r 与 w 可能是时变的，问题(1)不一定是自治的. 以 $V(t,k)$ 记问题(1)的值函数，直接用 3.3 节式(6)，得出问题(1)的最优性条件如下：

$$\begin{cases} \rho V = U + V_t + (rk + w - c)V_k + \dfrac{1}{2}\sigma_u^2\varphi^2 V_{kk}, & (4a) \\ 0 = U' - V_k, & (4b) \\ \rho V_k = V_{tk} + rV_k + (rk + w - c + \varphi\varphi_k\sigma_u^2)V_{kk} + \dfrac{1}{2}\sigma_u^2\varphi^2 V_{kkk}. & (4c) \end{cases}$$

由式(4b)得 $U' = V_k$，于是

$$\begin{aligned} dU' &= dV_k = V_{tk}dt + V_{kk}dk + \frac{1}{2}V_{kkk}(dk)^2 & \text{(用 Itô 公式)} \\ &= \left[V_{tk} + (rk + w - c)V_{kk} + \frac{1}{2}\sigma_u^2\varphi^2 V_{kkk}\right]dt + \varphi V_{kk}du & \text{(用式(1b))} \\ &= [(\rho - r)V_k - \varphi\varphi_k\sigma_u^2 V_{kk}]dt + \varphi V_{kk}du. & \text{(用式(4c))} \end{aligned}$$

上式两端同除以 V_k 得

$$\frac{dU'}{U'} = (\rho - r)dt - \frac{\varphi V_{kk}}{V_k}(\varphi_k\sigma_u^2 dt - du), \tag{5}$$

式(5)可称之为问题(1)的 **Euler 方程**. 若 $\varphi_k \equiv 0$，则从式(5)得

$$\frac{E[dU'/dt]}{U'} = \rho - r. \tag{6}$$

若进而设随机扰动消失，则

$$\frac{1}{U'}\frac{dU'}{dt} = \frac{U''\dot{c}}{U'} = -\sigma g_c,$$

其中 $\sigma = -cU''(c)/U'(c)$ 是效用函数 $U(\cdot)$ 的相对风险厌恶系数(σ 不必是常数，除非 $U(\cdot)$ 是CRRA 效用函数)，$g_c = \dot{c}/c$ 是消费增长率. 于是式(6)简化为

$$g_c = (r - \rho)/\sigma, \tag{6$'$}$$

这正是确定性 Ramsey 模型的 Euler 方程，在文献中以 **Keynes-Ramsey 条件**著称. 因此不妨说，式(6)是随机形式下的 Keynes-Ramsey 条件.

方程(5)与(1b)一起构成问题(1)的宏观均衡条件. V_k 通常理解为 k 的影子价格. 若 $V_{kk} = 0$ ($\Leftrightarrow V$ 是 k 的线性函数)，则方程(5)简化成

$$dU' = U'(\rho - r)dt.$$

若 $(c(t), k(t))$ 是问题(1)的最优解，则由 3.3 节式(2)有

$$V(t, k(t)) = E_t\int_t^{\infty} e^{\rho(t-s)}U(c(s))ds, \tag{7$_t$}$$

此外,要求以下横截性条件满足(依 3.3 节式$(7)_t$):

$$\lim_{s\to\infty} \mathrm{E}_t[\mathrm{e}^{-\rho s}V(s,k(s))] = 0 \quad (t \geqslant 0). \tag{8$_t$}$$

若 r,w 与 t 无关,则问题(1)是自治的,此时 $V(\cdot)$ 不显含 t,$(7)_t$ 与 $(8)_t$ 可分别代之以$(7)_0$ 与$(8)_0$.

C. 显式解

为利用3.3.3 小节中的结果,下面假定 r,w,φ 为常数,$r>0,\sigma_u^2=1$,于是式(1)是一个具线性约束的自治问题.下面分别考虑两种特殊情况.

(i) 二次效用函数情形.设 $U(\cdot)$ 依 2.3 节式(7),则可套用 3.3.3A 的结果.将问题(1)与 3.3 节中问题(16)对照,3.3 节式(16)中的 x,y,a,b,c,q 分别对应于现在的 $c,k,1,r,w,\varphi$. 假定 $2r>\rho$(相当于3.3.3A 中的条件 $2b>\rho$),则问题(1)有二次值函数 $V(k)=a_0+a_1k+a_2k^2$,其中(依 3.3 节式(18)与式(18)′)

$$\begin{cases} 2a_2 = m(\rho-2r),\ a_1 = gm(\rho-2r),\ g=(mw-1)/mr, \\ \rho\, a_0 = a'^2_1/2m + a_1 w + a_2\varphi^2. \end{cases} \tag{9}$$

然后利用3.3 节式(20)′得出问题(1)的最优解为

$$\begin{cases} k(t) = (g+k_0)\mathrm{e}^{(\rho-r)t} - g + \varphi\int_0^t \mathrm{e}^{(\rho-r)(t-s)}\mathrm{d}u(s); \\ c(t) = m^{-1} + (2r-\rho)[k(t)+g]. \end{cases} \tag{10}$$

下面考虑两个基本问题:模型参数如何影响平均增长率 ψ 与最优折现效用 V,这些问题对于本章考虑的其他模型也将是主要研究对象.

首先考虑平均增长率 ψ. 以 $c=m^{-1}+(2r-\rho)(k+g)$ 代入方程(1b),得出

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{k}\mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}\right] = r + \frac{w-c}{k} \\ &= r + \frac{mw-1}{mk} + (\rho-2r)\left(1+\frac{g}{k}\right) \\ &= (\rho-r)(1+g/k). \qquad\qquad (\text{用 } g=(mr-1)/mr) \end{aligned}$$

直接看出 $\partial g/\partial w = 1/r$;而由式(10)有

$$\frac{\partial k}{\partial w} = \frac{1}{r}[\mathrm{e}^{(\rho-r)t}-1];$$

$$\frac{\partial k}{\partial \varphi} = \int_0^t \mathrm{e}^{(\rho-r)(t-s)}\mathrm{d}u(s).$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial w} &= \frac{\rho-r}{k^2 r}[k - g\mathrm{e}^{(\rho-r)t} + g] \\ &= \frac{\rho-r}{k^2 r}\left[k_0\mathrm{e}^{(\rho-r)t} + \varphi\int_0^t \mathrm{e}^{(\rho-r)(t-s)}\mathrm{d}u(s)\right], \qquad (\text{用式(10)}) \end{aligned}$$

故得

$$\mathrm{E}\left[\frac{\partial \psi}{\partial w}\right]=\frac{k_0(\rho-r)}{k^2 r}\mathrm{e}^{(\rho-r)t}.$$

其次，显然有 $\mathrm{E}[\partial\psi/\partial\varphi]=0$. 由此可见，平均地说，增长率 ψ 与收入风险无关(即与 φ 无关)，而与收入 w 正相关(若 $\rho>r$)或负相关(若 $\rho<r$).

其次考虑 $V=V(k_0)$. 由 $V=a_0+a_1k_0+a_2k_0^2$ 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial w}&=\frac{\partial a_0}{\partial w}+k_0\frac{\partial a_1}{\partial w}+k_0^2\frac{\partial a_2}{\partial w}\\&=\frac{1}{\rho}\left(-\frac{a'_1}{m}\frac{\partial a_1}{\partial w}+w\frac{\partial a_1}{\partial w}+a_1\right)+k_0\frac{\partial a_1}{\partial w}\qquad(\text{用式(9)})\\&=\frac{a_1}{\rho}+\left(-\frac{a'_1}{m\rho}+\frac{w}{\rho}+k_0\right)\frac{\partial a_1}{\partial w}\\&=\frac{m(\rho-2r)}{r^2}\left(w-\frac{1}{m}+rk_0\right);\end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi}=\frac{\partial a_0}{\partial\varphi}=\frac{2a_2\varphi}{\rho}.$$

因 $\partial^2V/\partial w^2=m(\rho-2r)/r^2<0$，故 V 在 $w=m^{-1}-rk_0$ 时达到最大. 设 $\varphi>0$，因 $a_2<0$，故 $\partial V/\partial\varphi<0$，即 V 与 φ 负相关.

值得注意的是，当 $0<w<m^{-1}-rk_0$，$\rho<r$ 时，增加收入 w 对于福利(体现于 V)有正面影响，而对于增长有负面影响.

(ii) CARA 效用函数情形. 设 $U(\cdot)$ 依 3.3 节式(27)，$\sigma_u^2=1$. 由 3.3.3B，问题(1)有值函数 $V(k)=-\xi\mathrm{e}^{-\eta k}$，其参数满足(依 3.3 节式(30))

$$\frac{1}{\alpha}\ln\eta\xi=\frac{r-\rho}{\alpha r}-w+\frac{\alpha r\varphi^2}{2},\quad \eta=\alpha r.\tag{11}$$

然后用 3.3 节式(31)得出显式解：

$$\begin{cases}k(t)=k_0+\left(\dfrac{r-\rho}{\alpha r}+\dfrac{\alpha r\varphi^2}{2}\right)t+\varphi u(t),\\[2mm] c(t)=rk(t)+w+\dfrac{\rho}{\alpha r}-\dfrac{\alpha r\varphi^2}{2}.\end{cases}\tag{12}$$

注意与二次效用函数情况不同(参看式(10))，此处消费与 φ 负相关，即收入风险有损于消费.

现在考虑最优值 $V=V(k_0)$ 对参数 w,φ,r 的依赖关系. 容易看出 V 与 w 正相关，与 φ 负相关. V 对 r 的依赖性稍复杂. 算出

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\eta k_0}\frac{\partial V}{\partial r}&=-\frac{\partial\xi}{\partial r}+\xi k_0\frac{\partial\eta}{\partial r}=\partial\xi k_0-\xi\frac{\partial}{\partial r}\ln\xi\\&=\partial\xi k_0+\frac{\xi}{r}-\xi\left(\frac{\alpha^2\varphi^2}{2}+\frac{\rho}{r^2}\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{\xi}{r^2}\left[\left(\alpha k_0-\frac{\alpha^2\varphi^2}{2}\right)r^2+r-\rho\right];$$

不妨设 $a\triangleq\alpha k_0-\alpha^2\varphi^2/2<0$（这意味着扰动适当大），则二次方程 $ar^2+r-\rho=0$ 有两个正根 $0<r_1<r_2$，

$$r_{1,2}=\frac{1}{2a}(-1\pm\sqrt{1+4a\rho}).$$

容易看出 $V(k_0)$ 分别在 $r=r_1$ 与 $r=r_2$ 时取得最小值与最大值. 这就表明，对于消费者期望总效用来说，$r=r_2$ 是最优的，而 $r=r_1$ 是最差的.

D. $r=\rho$ 的情形

在任何形式的消费决策模型中，$r=\rho$ 是一个值得注意的特殊情况. 直观上，$r=\rho$ 意味着主观折现率与市场折现率一致，这种假定当然不无道理. 对于确定性的Ramsey 模型，方程(6)′表明，在均衡 ($g_c=0$) 时 恰有 $r=\rho$. 在2.3 节中，我们着重讨论了 $\beta R=1$ 这一特殊情况，而这恰好相当于 $r=\rho$. 从经济现实来看，$r=\rho$ 也许是一个有点粗略的假定. 但假定 $r=\rho$ 将导向数学上的明显简化，则是确定无疑的，至少 2.3 节中对离散模型的分析已充分证明了这一点.

下面设 $r=\rho$. 于是 Euler 方程(5)简化为

$$\mathrm{d}U'=-\varphi\varphi_k\sigma_u^2V_{kk}\mathrm{d}t+\varphi V_{kk}\mathrm{d}u.$$

现在进一步假定 $\varphi_k=0$，即 φ 不显含 k（这当然有点背离现实），则从 Euler 方程积出

$$U'(c(s))=U'(c(t))+\int_t^s\varphi V_{kk}\mathrm{d}u(\tau)\quad(s\geqslant t\geqslant 0),$$

从而 $\mathrm{E}_t[U'(c(s))]=U'(c(t))(s\geqslant t)$，这表明 $U'(c(t))$ 是一个鞅. 若进而假定 $U(\cdot)$ 是二次效用函数，则 $c(t)$ 亦是一个鞅.

$c(t)$ 是一个鞅是值得高度注意的事实，它导致一系列重要结论，其中之一是方程 $(3)_t$ 可明显简化. 当 $r=\rho$ 时有 $R(t)=\rho t$，于是方程 $(3)_t$ 相当于

$$k(t)=\int_t^\infty \mathrm{e}^{\rho(t-s)}\mathrm{E}_t[c(s)-w(s)]\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{\rho}c(t)-\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho s}\mathrm{E}_tw(t+s)\mathrm{d}s,$$

即

$$c(t)=\rho k(t)+\rho\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho s}\mathrm{E}_tw(t+s)\mathrm{d}s\quad(t\geqslant 0).\tag{13}$$

读者会立即看出，式(13)正是 2.3 节式(9)的一个连续时间推广，它表明最优消费 $c(t)$ 取决于当前资产 $k(t)$ 与对未来劳动收入的期望. 如同在 2.3.1C 中一样，不妨将式(13)之右端看作某种持久性收入.

E. 社会计划者决策

在问题(1)中，个体决策者是将 r,w 当作与 k 无关的给定变量（或参数）看待

的. 而从社会的角度看来，r,w 当然与经济的增长过程有关，因而最终是 k 的函数. 如所熟知，在一个完全竞争的市场中，厂商的利润最大化选择导致

$$r = f'(k) - \delta, \quad w = f(k) - kf'(k), \tag{14}$$

其中 $f(\cdot)$ 是新古典生产函数(参看 4.1.1A)，δ 是资本折旧率. 由式(14)得出

$$rk + w = f(k) - \delta k;$$

这就可将预算约束方程(1b)改写成：

$$\mathrm{d}k = [f(k) - \delta k - c]\mathrm{d}t + \varphi \mathrm{d}u. \tag{1b$'$}$$

在社会计划者看来，资本 k 的增长方程正是问题(1b)′，而不是问题(1b). 因而，社会计划者的消费决策问题就是问题(1a)、(1b)′.

现在将 3.3 节式(6)用于问题(1a)、(1b)′，得出如下最优性条件：

$$\begin{cases} \rho V = U + V_t + [f(k) - \delta k - c]V_k + \frac{1}{2}\sigma_u^2\varphi^2 V_{kk}, \\ 0 = U' - V_k, \\ \rho V_k = V_{tk} + [f'(k) - \delta]V_k + [f(k) - \delta k - c + \sigma_u^2\varphi\varphi_k]V_{kk} \\ \qquad + \frac{1}{2}\sigma_u^2\varphi^2 V_{kkk}. \end{cases} \tag{15}$$

但若以式(14)代入式(15)，读者会发现，式(15)与个体决策问题(1)的最优性条件(4)竟然毫无区别！

这就得出如下重要结论：在 r 与 w 依式(14)表出的情况下，代表性消费者决策与社会计划者的消费决策并无区别. 由此可见，只要市场是完全竞争的，分散化的个体消费决策亦能达到社会最优. 这就在一个动态模型中达到了与一般均衡理论一致的结论.

更一般地，只要模型所描述的市场是完全的，即不存在任何外部性，则分散化的个体决策必定与集中化的社会计划者决策一致，而不论其决策目标是消费或其他经济指标. 今后我们将不只一次地用到这一结论.

4.2.2　考虑生产技术的消费决策

4.2.1E说明，消费者决策问题(1)中的资本积累方程(1b)可代以方程(1b)′. 不过，方程(1b)′中的生产函数并不涉及技术因素. 本小节要说明，如果个体至少部分地利用由全社会开发的技术来获得其产出，那么个体决策与社会计划者决策将得出不同的结果.

A. 模型与最优性条件

现在我们来改造方程(1b)′，使之能体现技术的作用. 类似于方程(1b)′，设个体依方程

$$\mathrm{d}k = (y - c)\mathrm{d}t + y\mathrm{d}u$$

积累资本，其中 y 是个体的收入（与方程(1b)′相比，此处为简单起见已设 $\delta=0$）. 关键问题在于如何表达 y. 为理解方便，不妨假定个体正好经营一家公司，它依据生产函数 $y=Ak^{\alpha}X^{\alpha'}$ 进行生产①，其中 $0<\alpha<1$，X 表示个体所能利用的技术. 假定技术由边干边学的方式开发，因而取决于生产中投入的资本. 下面约定 $X=k^{\varepsilon}K^{\varepsilon'}$，$\varepsilon\in[0,1]$ 是一个刻画外部性的指标：当 $\varepsilon=0$ 时 $X=K$ 完全取决于社会总资本 K，技术具有完全的外部性；当 $\varepsilon=1$ 时 $X=k$，个体完全依靠自身开发技术，外部性消失.

在新的生产函数设定下，个体决策问题在形式上仍然类似于问题(1a)、问题(1b)′：

$$\begin{cases} \max\limits_{c} \mathrm{E}_0\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\rho t}U(c(t))\mathrm{d}t, & (16a)\\ \text{s.t.}\quad \mathrm{d}k=(y-c)\mathrm{d}t+y\mathrm{d}u,\quad k(0)=k_0, & (16b)\end{cases}$$

只是现在

$$y=Ak^{\alpha}X^{\alpha'}=Ak^{\alpha}(k^{\varepsilon}K^{\varepsilon'})^{\alpha'}=Ak^{\beta}K^{\beta'},$$

其中 $\beta=\alpha+\alpha'\varepsilon=\varepsilon+\varepsilon'\alpha\in[\alpha,1]$，当 $\varepsilon=0$（完全外部性）时 $\beta=\alpha$，当 $\varepsilon=1$（外部性消失）时 $\beta=1$. 因方程(16b)中含有不同于 k 的变量 K，K 是时变的且非个体所能决定，故问题(16)不是自治的；它显然也不是线性约束的.

由 $y=Ak^{\beta}K^{\beta'}$ 直接得出

$$\partial y/\partial k=\beta y/k.$$

再结合 3.3 节式(6)，可写出问题(16)的最优性条件如下：

$$\begin{cases} \rho V=U+V_t+(y-c)V_k+\dfrac{1}{2}\sigma_u^2y^2V_{kk}, & (17a)\\ 0=U'-V_k, & (17b)\\ \rho V_k=V_{tk}+\dfrac{\beta y}{k}V_k+\left(y-c+\dfrac{\beta\,\sigma_u^2y^2}{k}\right)V_{kk}+\dfrac{1}{2}\sigma_u^2y^2V_{kkk}. & (17c)\end{cases}$$

B. 宏观均衡

从现在开始直至本节结束，都假定 $U(\cdot)$ 是具有参数 $\sigma>1$ 的CRRA 效用函数（依 3.3 节式(32)）. 不过，因问题(16)并非线性约束的自治问题，并不能直接应用3.3.2B 中的方法求出问题(16)的显式解，更不能套用3.3.3C 中的结果. 此处正是应用3.3.4 小节中所述思想的地方：取代直接解问题(16)，考虑求它的某

---

① 亦可用一般的新古典生产函数 $y=F(k,X)$，但这对于下面的分析并无本质影响，只是徒然增加公式的复杂性. 设"个体正好经营一家公司"这种解释，只是一种方便的简化，当然并不现实. 更合理的解释是：个体将其全部资产 k 投资于产业（分散化的厂商）并取得股权，然后依股权分得收入 y. 因生产是分散化的，故技术 X 具有外部性. 上述两种解释似乎差异甚大，但实质上是等价的：就投资回报的特性而言，平均地说，独自经营的个体与拥有股权的个体是一样的.

种均衡解.为此,要利用某种宏观均衡条件.下面用到的宏观均衡条件极其简单而又自然,致使人们难以置疑:

(i) 个体无差别条件:$k/K \equiv \text{const}$;

(ii) 常数比率条件:$\mu \triangleq c/k \equiv \text{const}$.

为记号方便起见,下面设在宏观均衡时 $k/K \equiv 1$,这意味着将**个体总数标准化为1**.这一假定初看起来似乎不近情理,但它能明显简化公式,并且无任何不利后果,因而在宏观经济的数理分析中被广泛采用.本书后面的模型亦将不加说明地采用这一假定.这一假定的明显好处是:在均衡状态下,**个体变量与总体变量一致!**

一旦假定 $k = K, c = \mu k$,就有 $y = Ak$,

$$dk = k(\psi dt + A du), \qquad (\text{依式}(16b)) \tag{18}$$

其中 $\psi = A - \mu$ 是 k 的均衡增长率.由方程(18)解出

$$k(t) = k_0 e^{\lambda t + Au(t)}, \quad c(t) = \mu k(t), \tag{19}$$

其中 $\lambda = \psi - A^2\sigma_u^2/2$.式(19)表示了问题(16)的某种均衡解.不过,其中所含常数 μ 尚待确定.

为求出均衡值 μ,假定在均衡时问题(16)的值函数 V 可写成 $V = aU(k)$,$a > 0$ 取决于条件(17b):

$$a = \mu^{-\sigma}. \tag{20}$$

由直接求导易验证(或直接用3.3节式(42)):

$$kV_{kk} = -\sigma V_k, \quad k^2 V_{kkk} = \sigma\bar{\sigma}V_k. \quad (\bar{\sigma} = \sigma + 1) \tag{21}$$

值得注意的是,类似于式(21)的式子在本书中将多次用到.以 $V_{tk} = 0, y/k = A$ 及式(21)代入条件(17c),经整理后得

$$\mu = A + \frac{\rho - A\beta}{\sigma} - \frac{A^2\sigma_u^2(\bar{\sigma} - 2\beta)}{2}. \tag{22}$$

然后用 $\psi = A - \mu$ 得均衡增长率

$$\psi = \frac{A\beta - \rho}{\sigma} + \frac{A^2\sigma_u^2(\bar{\sigma} - 2\beta)}{2}. \tag{23}$$

自然要求 $\mu > 0$,这相当于

$$2\rho + 2A(\sigma - \beta) > A^2\sigma\,\sigma_u^2(\bar{\sigma} - 2\beta), \tag{24}$$

下面假定这一条件已被满足.注意,当 σ_u^2 适当小时条件(24)必能满足.

C. 参数的作用

首先指出一个值得注意的基本事实:$\psi = A - \mu$ 与 μ 负相关,而

$$V \triangleq V(k_0) = \mu^{-\sigma}U(k_0) \qquad (\text{用式}(20))$$

与 μ 正相关(注意 $U(k_0) < 0$!).这就表明,若 μ 依赖于某个异于 A 的模型参数 s,则 ψ, V 与 s 的相关性恰好相反,这意味着有利于经济增长则必然有损于福利,

反之亦然.这一事实揭示了增长目标与福利目标之间的深刻差别,这种差别今后将在不同的模型中反复表现出来,因而不能不承认它具有某种普遍性.这一点对于宏观经济分析的启示是:在评价宏观经济状况或宏观经济政策效果时,增长率与福利水平是两个很不相同的评价指标,常常导致很不相同的结论,使得对于两者的权衡取舍成为一个微妙复杂的问题.

利用式(22)直接求出:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon} = \frac{A\alpha'}{2\sigma}(A\sigma\sigma_u^2 - 2), \tag{25}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \sigma_u^2} = \frac{A^2(2\beta - \bar{\sigma})}{2} < 0. \qquad (\text{用 } \sigma > 1) \tag{26}$$

这表明 μ 总与 σ_u^2 负相关;当 σ_u^2 适当小时 μ 亦与 ε 负相关.这就得出结论:较大的产出波动导致较高的增长率但较低的福利;若产出波动是轻微的,则降低技术的外部性(这意味着提高参数 ε)有利于经济增长,但有损于福利.直观上,提高 ε 意味着个体减少对于可无偿利用的流行技术的依赖,更注重通过自身的投入来开发技术;这样做的后果是提高了经济增长率,同时降低了福利,这应当是可以理解的.

由 μ 与 ε 负相关这一事实可推出,当 $\varepsilon = 1$(即技术的外部性消失)时 ψ 达到最大,而 V 达到最小.由式(22),当 $\varepsilon = 1$ 时有(注意 $\varepsilon = 1 \Rightarrow \beta = 1$):

$$\mu = \frac{\rho - A\sigma'}{\sigma} + \frac{A^2\sigma'\sigma_u^2}{2}. \tag{27}$$

另一方面,直接以 $K = k$,从而 $y = Ak$ 代入方程(16b),然后以 $V = aU(k)$,$c = \mu k$ 及 $a = \mu^{-\sigma}$ 代入式(17a),正好得出 μ 如式(27).这就表明,由式(27)表出的 μ 可看作社会计划者决策所得出的均衡消费资本比,因为从社会计划者看来,资本积累方程(16b)应代之以

$$\mathrm{d}k = (Ak - c)\mathrm{d}t + Ak\mathrm{d}u. \tag{16b$'$}$$

这就得出结论:若技术不具有外部性(即 $\varepsilon = 1$),则个体决策与社会计划者决策一致;若 $0 \leqslant \varepsilon < 1$,则与个体决策相比,社会计划者决策导致较高的增长率,但得出较低的社会福利.这一结论在其他模型中也常有出现,今后将多次遇到,是很值得注意的普遍现象.

已经提到,μ 与 $A - \mu$ 之间的权衡是一个微妙问题.下面提出一个简化的解法.设 μ 与 $A - \mu$ 的权重分别为 η 与 $\eta' = 1 - \eta (0 \leqslant \eta \leqslant 1)$,则参数的选择取决于解最大化问题:

$$\max_s \ [\eta \ln\mu + \eta' \ln(A - \mu)],$$

s 是我们所关注的模型参数.以上问题的微分条件是(设 $s \neq A$):

$$0 = \frac{\partial \mu}{\partial s}\left(\frac{\eta}{\mu} - \frac{\eta'}{A - \mu}\right) = \frac{\partial \mu}{\partial s}\frac{A\eta - \mu}{\mu(A - \mu)},$$

在 $\mu,\psi>0,\partial\mu/\partial s\neq 0$ 的情况下，以上条件相当于 $A\eta=\mu$，即

$$A\eta = A + \frac{\rho - A\beta}{\sigma} - \frac{A^2\sigma_u^2(\bar{\sigma} - 2\beta)}{2}.$$

由此解出 β 与 σ_u^2 的最优值为

$$\beta^* = \frac{A^{-1}\rho + \sigma\eta' - A\sigma\bar{\sigma}\sigma_u^2/2}{1 - A\sigma\sigma_u^2},$$

$$\sigma_u^{2*} = \frac{2(\rho + A\sigma\eta' - A\beta)}{A^2\sigma(\bar{\sigma} - 2\beta)}.$$

当然，仅当 $0\leqslant\beta^*\leqslant 1,\sigma_u^{2*}\geqslant 0$ 时，所求得的最优值才是有意义的.

D. 总资本约束进入模型

将个体资本约束方程(16b)加总，得到社会资本 K 的约束方程

$$dK = (Y - C)dt + Ydu,\quad Y = AK. \tag{16c}$$

这就表明，在问题(16)中完全看作外生变量的总资本 K，其实为市场条件所约束；理性的个体决策者在作出决策时，似乎应意识到 K 所受到的约束(16c). 那么，如果将问题(16c)补入问题(16a)、问题(16b)，个体决策问题的解将有何变化？这无疑是一个令人感兴趣的问题，现在就来作一讨论.

下面以 $V=V(t,k,K)$ 记问题(16a)～问题(16c)的值函数. 因

$$dV = V_t dt + V_k dk + V_K dK + \frac{1}{2}[V_{kk}(dk)^2 + 2V_{kK}dkdK + V_{KK}(dK)^2],$$

以式(16b)与式(16c)代入其中并用Itô微分的乘法表(3.1节式(43))得出：

$$\begin{aligned} LV =& V_t + (y-c)V_k + (Y-C)V_K \\ &+ (\sigma_u^2/2)(y^2V_{kk} + 2yYV_{kK} + Y^2V_{KK}). \end{aligned}$$

当然，以上结果亦可直接套用3.1节中的公式(46)得出. 由3.3节式(5)，问题(16a)～问题(16c)的最优性条件为

$$\begin{cases} 0 = U' - V_k, & (17a)' \\ \rho V_k = (LV)_k & \\ \quad = V_{tk} + \dfrac{\beta y}{k}V_k + (y-c)V_{kk} + (Y-C)V_{kK} & \\ \quad\quad + \dfrac{\sigma_u^2}{2}\left(\dfrac{2\beta y^2}{k}V_{kk} + y^2V_{kkk} + \dfrac{2\beta yY}{k}V_{kK} + 2yYV_{kkK} + Y^2V_{kKK}\right), & (17b)' \\ \rho V_K = (LV)_K & \\ \quad = V_{tK} + \dfrac{\beta' y}{K}V_k + (y-c)V_{kK} + AV_K + (Y-C)V_{KK} & \\ \quad\quad + \dfrac{\sigma_u^2}{2}\left[\dfrac{2\beta' y^2}{K}V_{kk} + y^2V_{kkK} + 2\left(\dfrac{\beta' yY}{K} + Ay\right)V_{kK}\right. & \\ \quad\quad \left. + 2yYV_{kKK} + 2AYV_{KK} + Y^2V_{KKK}\right] & (17c)' \end{cases}$$

今设 $V=ak^pK^q$，参数 a,p,q 待定. 设在均衡时 $k=K,y=Y=Ak,\mu=c/k\equiv\text{const}$. 则依条件(17a)'有

$$(\mu k)^{-\sigma}=a\xi k^{\xi+\eta-1},$$

这推出

$$q=\sigma'-p,\quad q'=\sigma+p,\quad ap=\mu^{-\sigma}.$$

由 $V=ak^pK^q$ 直接算出:

$$kV_k=pV,\quad k^2V_{kk}=-pp'V,\quad k^3V_{kkk}=(2-p)pp'V;$$

$$KV_K=qV,\quad K^2V_{KK}=-qq'V,\quad K^3V_{KKK}=(2-q)qq'V;$$

$$kKV_{kK}=pqV,\quad k^2KV_{kkK}=-pp'qV,\quad kK^2V_{kKK}=-pqq'V.$$

将以上结果代入式(17b)'与式(17c)'，得出在均衡时有

$$\mu=A+\frac{\rho-A\beta}{\sigma}+\frac{A^2\sigma_u^2}{2}(2\beta-\bar{\sigma}),$$

$$\mu=A+\frac{\rho-A}{\sigma}-\frac{A\beta'p}{\sigma q}+\frac{A^2\sigma_u^2}{2q}[p(\bar{\sigma}-2\beta)+\sigma'^2].$$

令以上两式右端 σ_u^2 的系数相等，得

$$\sigma'^2=(2\beta-\bar{\sigma})(p+q)=\sigma'(2\beta-\bar{\sigma}),$$

这得出 $\beta=1$. 这就得出结论:问题(16a)～(16c)不能有形如 ak^pK^q 的值函数，除非 $\beta=1$，即外部性消失，个体决策重合于社会计划者决策. 由此可见，将总资本约束纳入个体决策问题，在某种意义上意味着使个体决策者变成社会计划者!

这一段的一个附带启示是，我们看出增加一个状态变量会使随机最优决策问题如何显著地复杂化. 因此，我们将尽可能避免使用多于一个状态变量的随机最优决策模型，尽管这并非总能做到.

4.2.3 福利性公共开支

在现代国家中，政府对于宏观经济运行起着特殊而重要的作用. 在市场经济条件下，政府一般并不直接参与商业经营，主要通过其政策行为来实现宏观调控. 政府政策按其功能可区分为产业政策、财政政策与货币政策等，其中财政政策无疑是最常用的政策手段. 所谓财政政策，简单地说，就是政府运用适当的筹资方式(征税或举债)，占用一定比例的社会资源，然后将其用于公共开支，以维持公共生活的正常运行，或增进公众福利与促进社会经济发展. 通常，公共开支包括三个部分:政府购买、转移支付与纯利息支付，后者一般仅占很小的比例. 财政政策必然关系到消费者的福利，因而自然结合进消费决策模型. 对于涉及财政政策的模型，数理分析的一个重要目标是:阐明政策参数(如公共开支比率 g，税率 τ 等)对经济增长与社会福利的影响，最好求出某种最优政策，如最优税率 τ 等.

A. 模型与最优性条件

下面考虑的模型源于Eaton 1981年的工作，只是加进了福利性公共开支这一因素．如同在4.2.2小节中一样，将个体总数标准化为1，因而在宏观均衡时个体变量重合于总体变量．设K，Y分别为社会总资本存量与总产出，k，y是相应的个体变量，假定$y=Ak$．以$G=gK$记公共开支，g为正常数．此处以gK取代似乎更自然的gY，意在更便于与后面的两个模型对照；况且，依据资本（而不是依据产出）决定政府开支，不无合理性．紧接着的一个关键假设是：进入个体效用函数的并非G本身，而是G_p：

$$G_p = G(k/K)^\delta = gk^\delta K^{\delta'}, \tag{28}$$

其中$\delta\in[0,1]$是所谓**外部性指标**，当$\delta=0$时$G_p=G$与个体无关，公共福利具有完全的外部性；当$\delta=1$时$G_p=gk$完全取决于个体资本，外部性消失，或者说因个体完全**拥挤**而使G失去其公共特征．将G_p加入效用函数，得出消费者期望折现效用的如下表示：

$$V = \mathrm{E}_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}U[c(t)G_p^\theta(t)]\mathrm{d}t,$$

其中参数$\theta\geqslant 0$表出G_p对于消费者效用的权重①，当$\theta=0$时公共开支的福利效应消失．

下面转向考虑个体的预算约束．设消费者的资产或财富w由两部分组成：$w=k+b$，$k=\nu w(0<\nu\leqslant 1)$，$b=\nu' w$是个体持有的政府债券，可称为金融资产．为构成个体消费决策问题，关键的步骤是适当地表出个体的预算约束．鉴于同样的问题广泛出现于其他随机决策模型中，此处作一较详细的解释．构成动态预算约束的一般规则是，个体在任何时段$[t,t+\mathrm{d}t]$内应满足如下动态平衡方程：

$$资产净增量(\mathrm{d}w) = 收入 - 支出.$$

在目前的情况下，收入由两部分组成：生产或劳动收入$(\mathrm{d}y)$、政府债券回报$(b\mathrm{d}R_b)$；支出亦由两部分组成：消费支出$(\mathrm{d}c)$与纳税$(\mathrm{d}T)$．

于是有

$$\mathrm{d}w = \mathrm{d}y + b\mathrm{d}R_b - \mathrm{d}c - \mathrm{d}T. \tag{29}$$

对于消费简单地取$\mathrm{d}c=c\mathrm{d}t$．至于$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}R_b$，$\mathrm{d}T$，通常都包含一定的随机扰动，下面的一组方程在消费决策模型中是经常出现的：

$$\begin{cases} \mathrm{d}y = y(\mathrm{d}t + \mathrm{d}u_Y), & (30\mathrm{a}) \\ \mathrm{d}R_b = r\mathrm{d}t + \mathrm{d}u_B, & (30\mathrm{b}) \\ \mathrm{d}T = y(\tau\mathrm{d}t + \tau_1\mathrm{d}u_Y) + c\,\omega\mathrm{d}t. & (30\mathrm{c}) \end{cases}$$

---

① 效用函数$U(cG_p^\theta)$亦可换成$U(c^\theta G_p^{1-\theta})(0<\theta\leqslant 1)$（参考4.6节式(9)）．权重$\theta$的这两种配置形式各有优缺，实质上并无区别．

其中 du_Y 与 du_B 是Brown 运动，二者分别表达了产出与利率的随机扰动；r 是债券利率. r 与 du_B 对于个体是给定的，但最终将由模型内生地确定. 式(30c)表明税收 dT 由三部分组成：确定性收入(或常规收入)税 $(\tau y dt)$，随机性收入(或临时收入)税 $(\tau_1 y du_Y)$，消费税 $(\omega c dt)$. 自然，τ,τ_1 与 ω 就是相应的税率，它们都是外生常数，三者不必相同. 将式(30)代入式(29)，就得到所需的预算约束方程

$$\begin{aligned} dw &= (\tau' y + br - c\,\overline{\omega})dt + b du_B + \tau'_1 y du_Y \\ &= (A\nu\tau' w + \nu' r w - c\,\overline{\omega})dt + \nu' w du_B + A\nu\tau'_1 w du_Y \\ &\triangleq (\eta w - c\,\overline{\omega})dt + w du, \end{aligned}$$

其中 $\overline{\omega} = \omega + 1$ (今后使用一般约定：$\overline{x} = x + 1$)，

$$\begin{cases} \eta = A\nu\tau' + \nu' r, & (31a) \\ du = \nu' du_B + A\nu\tau'_1 du_Y. & (31b) \end{cases}$$

综上，可将消费者的最优决策问题表为：

$$\begin{cases} \max\limits_{c,\nu} E_0\int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(c(t)G_p^{\theta}(t))dt, & (32a) \\ \text{s.t.} \quad dw = (\eta w - c\,\overline{\omega})dt + w du, \quad w(0) = w_0. & (32b) \end{cases}$$

以 $V = V(t,w)$ 记问题(32)的值函数，则直接用3.3节式(6)得出问题的最优性条件如下：

$$\begin{cases} 0 = U' G_p^{\theta} - \overline{\omega} V_w, & (33a) \\ 0 = U' G_p^{\theta} \dfrac{c\delta\theta}{\nu} + (A\tau' - r) w V_w + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \sigma_u^2}{\partial \nu} w^2 V_{ww}, & (33b) \\ \rho V_w = U' G_p^{\theta} \mu\delta\theta + V_{tw} + \eta V_w + (\eta - \mu\overline{\omega} + \sigma_u^2) w V_{ww} & \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\sigma_u^2 w^2 V_{www}, & (33c) \end{cases}$$

其中

$$U' = U'(c\, G_p^{\theta}), \quad \mu = c/w,$$

$$\sigma_u^2 = \nu'^2\sigma_B^2 + 2A\nu\nu'\tau'_1\sigma_{BY} + A^2\nu^2\tau'^2_1\sigma_Y^2, \qquad \text{(用式(31b))}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \sigma_u^2}{\partial \nu} = -\nu'\sigma_B^2 + A(1-2\nu)\tau'_1\sigma_{BY} + A^2\nu\tau'^2_1\sigma_Y^2. \tag{34}$$

从条件(33a)′解出 $U' G_p^{\theta} = \overline{\omega} V_w$，然后代入式(33b)、式(33c)得到稍简化的条件：

$$\begin{cases} \left(A\tau' - r + \dfrac{\mu\overline{\omega}\delta\theta}{\nu}\right) V_w + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \sigma_u^2}{\partial \nu} w V_{ww} = 0, & (33b)' \\ V_{tw} + (\eta - \rho + \mu\overline{\omega}\delta\theta) V_w + (\eta - \mu\overline{\omega} + \sigma_u^2) w V_{ww} + \dfrac{1}{2}\sigma_u^2 w^2 V_{www} & \\ = 0. & (33c)' \end{cases}$$

注意以上公式中所含的 μ,ν,r 等并非给定的常数，它们都有待于用宏观均衡条件确定.

B. 宏观均衡

设在宏观均衡时 $k=K, y=Y, \mu, \nu$ 为常数，则 $G_p=G=gk=g\nu w$，因而

$$U(c\,G_p^\theta)=U[\mu(g\nu)^\theta w^\vartheta]=\text{const}\,U(w^\vartheta).$$

基于上式并参照3.3.3C 与4.2.2B 中的做法，设定 $V=aU(w^\vartheta)$，参数 a 待定. 将 $V_w=a\bar{\theta}w^{\theta\sigma'-1}$ 代入方程(33a)，得出 a 满足：

$$a\bar{\theta}\bar{\omega}\mu^\sigma=(g\nu)^{\theta\sigma'}. \tag{35}$$

如在3.3.4A 中已提到的，另一个关键的均衡条件是，均衡时 k 与 b 有同样的随机增长率，即

$$\frac{\mathrm{d}w}{w}=\frac{\mathrm{d}k}{k}=\frac{\mathrm{d}b}{b}. \tag{36}$$

注意式(36)只含一个独立条件，等式 $\mathrm{d}w/w=\mathrm{d}k/k$ 是 $\mathrm{d}k/k=\mathrm{d}b/b$ 的推论. 为将条件(36)具体化，需要 $\mathrm{d}k$ 与 $\mathrm{d}b$ 的具体表达式，即 k 与 b 的增长方程. 得出这些方程的方法如同导出方程(32b)一样：在时段 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 内，个体资本 k 的增量 $(\mathrm{d}k)=$ 收入 $(\mathrm{d}y)-$ 支出 $(\mathrm{d}c+\mathrm{d}G)$，其中 $\mathrm{d}G$ 是个体所分担的政府开支. 注意在宏观均衡时，个体同等地分摊公共开支(这是要点!). 公共开支受到某种与产出成比例的扰动，因此假定

$$\mathrm{d}G=G\mathrm{d}t+Y\mathrm{d}u_G, \tag{37}$$

其中 $\mathrm{d}u_G$ 与 $\mathrm{d}u_Y$ 一样是外生的Brown 运动，假定 $\mathrm{d}u_G$ 与 $\mathrm{d}u_Y$ 互不相关. 一旦确定了

$$\mathrm{d}k=\mathrm{d}y-\mathrm{d}c-\mathrm{d}G, \tag{38a}$$

就有

$$\mathrm{d}b=\mathrm{d}w-\mathrm{d}k=b\mathrm{d}R_b+\mathrm{d}G-\mathrm{d}T. \tag{38b}$$

以式(30)与式(37)代入式(38)，得到

$$\begin{cases}\mathrm{d}k=(y-G-c)\mathrm{d}t+y(\mathrm{d}u_Y-\mathrm{d}u_G), & (38\text{a})' \\ \mathrm{d}b=(G-\tau y+br-c\,\omega)\mathrm{d}t+b\mathrm{d}u_B+y(\mathrm{d}u_G-\tau_1\mathrm{d}u_Y), & (38\text{b})'\end{cases}$$

注意其中已用了均衡条件 $y=Y$ (方程(38)只在均衡时适用!). 约定 $\psi=\eta-\mu\bar{\omega}$，则方程(32b)可写成

$$\mathrm{d}w=w(\psi\mathrm{d}t+\mathrm{d}u). \tag{32b$'$}$$

现在将式(32b)$'$与式(38)$'$代入条件(36)，得到

$$\begin{aligned}\psi\mathrm{d}t+\mathrm{d}u&=(A-g-\mu/\nu)\mathrm{d}t+A(\mathrm{d}u_Y-\mathrm{d}u_G)\\&=\left[r+\frac{\nu(g-A\tau)-\mu\omega}{\nu'}\right]\mathrm{d}t+\mathrm{d}u_B+\frac{A\nu}{\nu'}(\mathrm{d}u_G-\tau_1\mathrm{d}u_Y).\end{aligned}$$

分别比较上式的确定性部分与扰动部分，得到

$$\begin{cases}\psi=A-g-\dfrac{\mu}{\nu}=r+\dfrac{\nu(g-A\tau)-\mu\omega}{\nu'}, & (39\text{a}) \\ \mathrm{d}u=A(\mathrm{d}u_Y-\mathrm{d}u_G)=\mathrm{d}u_B+\dfrac{A\nu}{\nu'}(\mathrm{d}u_G-\tau_1\mathrm{d}u_Y). & (39\text{b})\end{cases}$$

方程组(39)包含两个互相独立的等式，它们与式(32b)、式(33b)′、式(33c)′一起(共5个方程)构成模型的宏观均衡条件，将用来确定5个均衡值：$\mu,\nu,r,\sigma_B^2,\sigma_{BY}$. 求出这些均衡值已无原则困难，但涉及颇烦琐的计算，所得结果通常表为很繁冗的公式，并不很具吸引力. 下面我们通过适当技巧来简化计算过程与最终表达式. 首先，从式(39b)解出

$$\nu' \mathrm{d}u_B = A[(1-\nu\tau'_1)\mathrm{d}u_Y - \mathrm{d}u_G];$$

由此及 $\mathrm{d}u = A(\mathrm{d}u_Y - \mathrm{d}u_G)$ 求出

$$\begin{cases} \nu'^2\sigma_B^2 = A^2[\sigma_G^2 + (1-\nu\tau'_1)^2\sigma_Y^2], & (40a) \\ \nu'\sigma_{BY} = A(1-\nu\tau'_1)\sigma_Y^2, & (40b) \\ \sigma_u^2 = A^2(\sigma_G^2+\sigma_Y^2) \triangleq A^2\sigma_0^2. & (40c) \end{cases}$$

注意其中 ν 尚为未知. 将式(40a)与式(40b)代入式(34)得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \sigma_u^2}{\partial \nu} = -\frac{A^2}{\nu'}(\sigma_G^2 + \tau_1\sigma_Y^2). \tag{34'}$$

下面利用方程(33b)′、方程(33c)′与方程(39a)确定 μ,ν,r. 为简化公式，引入一组**复合参数**(注意这是一个基本技巧)：

$$\begin{cases} \gamma = \delta\theta + 1/\overline{\omega}, \quad \xi = \delta\theta + 1, \\ q = 1 - \overline{\theta}\sigma', \quad Z = q + \delta\theta\overline{\omega}, \quad \lambda = \tau' - Aq\tau'_1\sigma_Y^2. \end{cases} \tag{41}$$

由 $V = aU(w^{\theta}) = aw^{q'}/\sigma'$ 直接算出(比较式(21))

$$wV_{ww} = -qV_w, \quad w^2V_{www} = q\overline{q}V_w. \tag{42}$$

将式(42)与式(34)′代入式(33b)′，得出

$$\nu' r = \mu\overline{\omega}\delta\theta(\nu'/\nu) + A(\lambda - \nu\tau') + A^2q\sigma_0^2. \tag{43}$$

将式(31a)、式(34)′、式(41)～式(43)代入式(33c)′，经整理后得

$$\begin{cases} \mu\overline{\omega}(\xi q\nu + \delta\theta q') = M\nu, \\ M = \rho - A\lambda q' - \dfrac{1}{2}A^2qq'\sigma_0^2. \end{cases} \tag{44}$$

其次以式(43)代入式(39a)，经整理后得

$$\begin{cases} \mu\overline{\omega}(\gamma - \xi\nu) = N\nu, \\ N = A\lambda' - g - A^2q\sigma_0^2. \end{cases} \tag{45}$$

联立方程(44)与方程(45)解出

$$\nu = E/(D\xi),$$

其中

$$E = \gamma M - \delta\theta q' N, \quad D = M + qN; \tag{46}$$

$$\mu = D\nu/Z = E/(\xi Z). \tag{47}$$

将以上结果代入式(39a)，得出均衡增长率

$$\psi = A - g - D/Z. \tag{48}$$

这样，借助于复合参数 D,E,M,N,Z，将 μ,ν,ψ 表成了很简单的公式. 以式

(46)、式(47)代入式(43)，亦可得到表出 r 的类似公式. 但若以 M 与 N 的详细表达式(依式(44)与式(45))代入式(46)～式(48)，则最终表达式将异常复杂，此处并无具体写出之必要.

显然 $Z \geqslant q > 1$，故由式(47)知，为使 $\mu,\nu > 0$ (在经济上这是一个自然的要求)，必需 $D > 0$. 在 $D > 0$ 的条件下，$\mu > 0 \Leftrightarrow \nu > 0$；而 $\mu > 0 \Leftrightarrow E > 0$. 因此，自然假定 $D > 0$ 与 $E > 0$ 同时成立，即设

$$M + qN > 0, \quad \gamma M > \delta\theta q' N. \tag{49}$$

条件(49)表达了对模型参数的一定限制. 此处不拟详细讨论这些限制的具体表达式，只是指出，在适度的扰动下，条件(49)一般能被满足. 下面假定条件(49)已被满足.

一旦求出了 ψ (依式(48))，就可从方程(32b)′解出

$$w(t) = w_0 e^{\alpha + u(t)}, \quad \alpha = \psi - \sigma_u^2/2,$$

其中 $w_0 = k_0/\nu, \sigma_u^2 = A\sigma_0^2$ (依式(40c)). 如上的 $w(t)$ 给出资产 w 的均衡轨道.

C. 福利分析

现在考虑我们最关心的问题：模型参数(它们表达了市场条件与政策选择)如何影响福利. 为此，考虑最优值 $V = V(w_0)$ 与参数的相关性. 注意 $w_0 = k_0/\nu$，k_0 独立于模型参数，而 ν 则与参数有关. 由式(35)有

$$V = aU(w_0^{\bar{\theta}}) = \frac{g^{\theta\sigma'} k_0^{q'}}{\sigma' \bar{\theta}\bar{\omega} \mu^{\sigma} \nu^{\sigma'}},$$

即

$$-\ln(\sigma' V) = \ln \mu + \sigma' \ln(\nu/\mu) - \theta\sigma' \ln g - q' \ln k_0 + \ln \bar{\theta}\bar{\omega} \triangleq Q. \tag{50}$$

因 $\sigma' < 0$ (记住已设 $\sigma > 1$!)，故 Q 与 V 正相关. 以下设 s 是异于 $A,\delta,\theta,\sigma,\omega$ 的参数，则

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial s} - \frac{\sigma'}{D}\frac{\partial D}{\partial s} - \frac{\theta\,\sigma'}{g}\frac{\partial g}{\partial s}. \tag{51}$$

若方程 $\partial Q/\partial s = 0$ 有唯一解 $s = s^*$，且当 $s = s^*$ 时 $\partial^2 Q/\partial s^2 < 0$，则 Q (从而 V)在 $s = s^*$ 达到最大值，因而 s^* 是 s 的最优值；当 s 是政策参数时，s^* 就是关注福利的政府的最优选择. 当然，s^* 通常依赖于其他模型参数；若以 $s = s^*$ 代入模型，则可从有关的公式中消去参数 s.

一般来说，解出 s^* 与判定 $\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2} < 0$ 均未必容易. 在判定 $\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2}\big|_{s=s^*} < 0$ 时，常利用以下事实：若 $s \neq g$，则当 $\partial Q/\partial s = 0$ 时有

$$\mu Z \frac{\partial^2 Q}{\partial s^2} = -\sigma' \frac{\partial \nu}{\partial s}\frac{\partial D}{\partial s}, \tag{52}$$

从而 $\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2}\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial \nu}{\partial s}\frac{\partial D}{\partial s}\right)$.

下面考虑 $s=\tau, \sigma_G^2, g$ 这三种特殊情况.

(i) 取 $s=\tau$, 则

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \tau}=-1, \quad \frac{\partial M}{\partial \tau}=Aq', \quad \frac{\partial N}{\partial \tau}=A=\frac{\partial D}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial E}{\partial \tau}=\frac{Aq'}{\bar{\omega}}.$$

将以上结果代入式(51)得出, $\partial Q/\partial \tau=0$ 相当于 $\bar{\theta}D=\bar{\omega}E$, 即

$$\bar{\theta}(M+qN)=\bar{\omega}(\gamma M-\delta\theta q'N). \tag{53}$$

由方程(53)确能唯一地解出 $\tau=\tau^*$, 只是其表达式过长, 不便写出. 当 $\partial Q/\partial \tau=0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\xi D^2\frac{\partial \nu}{\partial \tau}&=D\frac{\partial E}{\partial \tau}-E\frac{\partial D}{\partial \tau} \qquad (\text{用式}(46))\\&=\frac{A}{\bar{\omega}}(q'D-\bar{\omega}E)\\&=\frac{AD}{\bar{\omega}}(q'-\bar{\theta})<0, \qquad (\text{用 } \bar{\theta}D=\bar{\omega}E)\end{aligned}$$

于是用式(52)得 $\partial^2 Q/\partial \tau^2<0$, 这表明 τ^* 确为最优税率.

设 $\tau^*>0$, 则在 $0<\tau<\tau^*$ 时必定 $\partial Q/\partial \tau>0$, 这意味着提高 τ 有利于增进福利. 另一方面, 直接由式(48)有

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau}=-\frac{1}{Z}\frac{\partial D}{\partial \tau}=-\frac{A}{Z}<0,$$

这表明对常规收入征税总有碍于经济增长. 可见, 从税率 τ 的制定者看来, 增长目标与福利目标并不相容, 二者无法兼顾.

用类似的方法可以得出: 存在唯一的最优税率 $\tau_1=\tau_1^*$, 它亦由方程(53)解出(视 τ 为给定).

(ii) 取 $s=\sigma_G^2$, 则

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_G^2}=0, \quad \frac{\partial M}{\partial \sigma_G^2}=-\frac{A^2qq'}{2}, \quad \frac{\partial N}{\partial \sigma_G^2}=-A^2q,$$

$$\frac{\partial D}{\partial \sigma_G^2}=-\frac{A^2q\bar{q}}{2}, \quad \frac{\partial E}{\partial \sigma_G^2}=\frac{A^2qq'(\delta\theta\bar{\omega}-1)}{2\bar{\omega}}.$$

代入式(51)得出, $\partial Q/\partial \sigma_G^2=0$ 相当于 $D\bar{\theta}(1-\delta\theta\bar{\omega})=E\bar{q}\bar{\omega}$, 即

$$(\bar{\theta}-\delta\theta\bar{\theta}\bar{\omega})(M+qN)=\bar{q}\bar{\omega}(\gamma M-\delta\theta q'N). \tag{54}$$

从方程(54)一般亦可唯一地解出 $\sigma_G^2=\sigma_G^{2*}$. 当 $\partial Q/\partial \sigma_G^2=0$ 时, 有

$$2\xi\bar{\omega}D^2\frac{\partial \nu}{\partial \sigma_G^2}=2\bar{\omega}\left(D\frac{\partial E}{\partial \sigma_G^2}-E\frac{\partial D}{\partial \sigma_G^2}\right)=A^2D\bar{\theta}q\sigma(1-\delta\theta\bar{\omega}),$$

故当 $\delta\theta\bar{\omega}<1$ 时 $\frac{\partial \nu}{\partial \sigma_G^2}>0$. 于是由式(52)得出, 若 $\delta\theta\bar{\omega}<1$, 则当 $\frac{\partial Q}{\partial \sigma_G^2}=0$ 时 $\frac{\partial^2 Q}{\partial(\sigma_G^2)^2}<0$, 从而 σ_G^{2*} 是最优的. 这就有类似于对税率的以下结论: 公共开支的

适度波动(这意味着 $0 < \sigma_G^2 < \sigma_G^{2*}$)有益于福利,但过大的波动则有损于福利.另一方面,直接从式(48)得出

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma_G^2} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial D}{\partial \sigma_G^2} = \frac{A^2 q\bar{q}}{2Z} > 0,$$

可见公共开支的波动总是促进增长!这又一次证明,增长目标与福利目标不必一致.

(iii) 取 $s = g$, 则

$$\frac{\partial M}{\partial g} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial g} = -1, \quad \frac{\partial D}{\partial g} = -q, \quad \frac{\partial E}{\partial g} = \delta\theta q'.$$

将这些代入式(51)得出, $\frac{\partial Q}{\partial g} = 0$ 相当于

$$\delta g\theta\bar{\theta}D + gqE = \theta DE. \tag{55}$$

直接算出

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial g^2} = \frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{\delta\theta q'}{E} + \frac{q\sigma'}{D} - \frac{\theta\,\sigma'}{g}\right) = -\frac{(\delta\theta q')^2}{E^2} + \frac{q^2\sigma'}{D^2} + \frac{\theta\,\sigma'}{g^2} < 0.$$

因此,方程(55)的解 $g = g^*$ 必为最优值.于是同样得出,适度的公共开支有益于福利.另一方面,由式(48)推出公共开支无益于增长!直观上,读者未必会同意这一结论.问题在于,读者应注意到,本模型中公共开支是纯福利性的,这一假设已经背离了经济现实.

D. 特殊情况

现在考虑特定参数取极端值的情况.这类特殊情况初看起来似乎欠具普遍性,但能得出较简单的公式,因而给模型带来有益的直观理解.考虑适当的特殊情况,在经济分析中是一种有普遍意义的常用技巧.

(i) 设 $\theta = 0$, 这意味着公共开支实际上不具福利效应.此时可依次得出如下较简单的公式:

$$\gamma = 1/\bar{\omega}, \quad \xi = 1, q = \sigma = Z; \qquad \text{(用式(41))}$$

$$M = \rho - A\lambda\sigma' - \frac{1}{2}A^2\sigma\,\sigma'\sigma_0^2; \qquad \text{(用式(44))}$$

$$N = A\lambda' - g - A^2\sigma\,\sigma_0^2; \qquad \text{(用式(45))}$$

$$\nu = E/D, \quad E = M/\bar{\omega}, \quad D = M + \sigma N; \qquad \text{(用式(46))}$$

$$\mu = D\nu/\sigma = M/\sigma\bar{\omega}; \qquad \text{(用式(47))}$$

$$\psi = A - g - \sigma^{-1}M - N. \qquad \text{(用式(48))}$$

方程(53)简化为 $N = 0$, 由此解出最优税率

$$\tau^* = A^{-1}g + A\sigma(\sigma_G^2 + \tau_1\sigma_Y^2) > 0.$$

方程(54)简化为 $M = N$, 由此解出最优的

$$\sigma_G^{2*} = \frac{2(A - g - \rho - A\sigma\tau')}{A^2\sigma\,\bar{\sigma}} - \frac{2\sigma\tau_1 + \sigma'}{\bar{\sigma}}.$$

方程(55)简化为 $gM = 0$，而 $M > 0$(用式(49))，故只能有 $g^* = 0$. 这一结果并不令人惊讶：既然公共开支无益于福利，那么从福利的标准看来，最好的选择自然是完全免除公共开支！

(ii) 设 $\delta = 0$，这意味着公共福利具有完全的外部性. 此时可依次得出

$$\gamma = 1/\overline{\omega}, \quad \xi = 1, \quad Z = q; \qquad \text{(用式(41))}$$

$$\nu = E/D, \quad E = M/\overline{\omega}, \quad D = M + qN; \qquad \text{(用式(46))}$$

$$\mu = D\nu/q = M/q\overline{\omega}; \qquad \text{(用式(47))}$$

$$\psi = A - g - q^{-1}M - N. \qquad \text{(用式(48))}$$

方程(53)简化为 $\theta M + \overline{\theta}qN = 0$，由此解出最优税率

$$\tau^* = \frac{A\theta\sigma' + gq - \rho\,\theta/\overline{\theta}}{A\sigma} + \frac{Aq}{2\sigma}[(\sigma + q)\sigma_G^2 + (2\sigma\tau_1 - \theta\,\sigma')\sigma_Y^2].$$

方程(54)简化为 $(q - \theta)M = \overline{\theta}qN$，由此解出 σ_G^{2*} 已不成问题，但不便写出它. 方程(55)简化为 $gq = \theta D$，由此解出最优的

$$g^* = \frac{\theta}{\overline{\theta}q}[Aq\tau + M - A^2q^2(\sigma_G^2 + \tau_1\sigma_Y^2)].$$

注意 M 不含 g. 从上式看出 g^* 与 θ 正相关，当 $\theta \to 0$ 时 $g^* \to 0$. 从直观上看，这是很自然的.

(iii) 设 $\sigma_0^2 = 0$，这意味着随机扰动消失，从而所给模型成为确定性的. 此时有 $\lambda = \tau'$，

$$M = \rho - Aq'\tau', \quad N = A\tau - g; \qquad \text{(用式(44)、式(45))}$$

$$D = \rho + q(A - g) - A\tau',$$

$$E = \gamma\rho - Aq'(\delta\theta + \tau'/\overline{\omega}) + g\delta\theta q'. \qquad \text{(用式(46))}$$

由于 M, N 等已充分简化，现在已可直接写出 ν, μ, ψ：

$$\nu = \frac{\gamma\rho - Aq'(\delta\theta + \tau'/\overline{\omega}) + g\delta\theta q'}{\xi(\rho + Aq - A\tau' - gq)}, \qquad \text{(用式(46))}$$

$$\mu = \frac{1}{\xi Z}\left[\gamma\rho - Aq'\left(\delta\theta + \frac{\tau'}{\overline{\omega}}\right) + g\delta\theta q'\right], \qquad \text{(用式(47))}$$

$$\psi = \frac{1}{Z}[A\tau' - \rho + \delta\theta\overline{\omega}(A - g)]. \qquad \text{(用式(48))}$$

由方程(53)解出

$$\tau^* = \frac{\theta(1 - \delta\overline{\omega})(Aq' - \rho) + g\overline{\theta}(q + \delta\theta\sigma'\overline{\omega})}{A\overline{\theta}\sigma}.$$

方程(54)不再有意义；方程(55)可化为一个关于 g 的二次方程，其解公式并不简单，不便写出.

若进而设 $\delta = 1, g = A\tau, \omega = 0$，则 $\xi = \overline{\theta} = \gamma, Z = \overline{\theta}\,\sigma$；此时有 $\nu = 1$，即债券消失；

$$\mu=(\rho-Aq'\tau')/(\bar{\theta}\,\sigma),$$
$$\psi=(A\bar{\theta}\tau'-\rho)/(\bar{\theta}\,\sigma),$$

注意此时条件 $\mu>0,\nu>0$ 自动满足.

E. 社会计划者决策

下面以社会计划者决策与个体决策进行对照，以彰显出外部性的后果.

在社会计划者看来，必定 $k=K$，因此 $G_p=gk$. 这就使得与问题(32)对应的社会计划者决策问题是一个自治问题. 相应地，G_p 的变化(其中 δ 被消去)使得条件(33)中不再出现 δ. 这一变化的后果是，式(43)～式(48)中所含的 δ 都应除去. 而这一改变的效果恰好相当于在式(43)～式(48)中取 $\delta=1$. 注意到 $\delta=1$ 意味着外部性消失，则得出结论：在外部性消失的条件下，社会计划者决策与个体决策一致；更准确地说，社会计划者决策无非是对应于 $\delta=1$ 的个体决策. 这无疑正好是我们所预期的.

当 $\delta<1$ 时，社会计划者决策与个体决策必不相同，下面将二者作一比较. 为此，只要考虑问题(32)的均衡值与 δ 的相关性，关注的重点是 ψ 与 V. 首先求出

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\delta}=\theta=\frac{\partial\xi}{\partial\delta},\quad \frac{\partial Z}{\partial\delta}=\theta\,\bar{\omega};\qquad\text{(用式(41))}$$

$$\frac{\partial M}{\partial\delta}=\frac{\partial N}{\partial\delta}=0;\qquad\text{(用式(44)、式(45))}$$

$$\frac{\partial D}{\partial\delta}=0,\quad \frac{\partial E}{\partial\delta}=\theta(M-q'N).\qquad\text{(用式(46))}$$

(i) ψ 与 δ 的相关性. 由式(48)有

$$\frac{\partial\psi}{\partial\delta}=\frac{D\theta\bar{\omega}}{Z^2}>0,$$

除非 $\theta=0$. 由此可见，当 $\theta>0$ 时 ψ 与 δ 正相关，因而在 $\delta=1$ 时 ψ 达到最大. 这就表明，与个体决策比较，社会计划者决策能达到较高的经济增长率.

(ii) V 与 δ 的相关性. 由式(50)有

$$Q=\ln E-\ln\xi-\sigma\ln Z+\cdots,$$

其中用省略号表达的项与 δ 无关. 于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial\delta}&=\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial\delta}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\xi}{\partial\delta}-\frac{\sigma}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\delta}\\&=\frac{\theta[\xi Z(M-q'N)-EZ-\xi\,\sigma\bar{\omega}E]}{\xi EZ}\triangleq\frac{\theta X}{\xi EZ}.\end{aligned}$$

取 $\tau=\omega=\sigma_0^2=0$，则 $\gamma=\xi,Z=q+\delta\theta$,

$$M-q'N=\rho+q'(g-A),$$
$$E=\xi(\rho-Aq')+g\delta\theta q'.$$

于是

$$
\begin{aligned}
X &= \xi(q+\delta\theta)[\rho+q'(g-A)]-[\xi\rho-q'(A\xi-g\delta\theta)](q+\delta\theta+\xi\sigma) \\
&= -\xi^2\sigma\rho+q'[A\xi^2\sigma+g(q+\delta\theta-\delta\theta\xi\sigma)].
\end{aligned}
$$

若 g 相对于 $A\xi^2\sigma$ 足够小，则 $X<0$，从而 $\partial Q/\partial\delta<0$. 这就表明，当 τ,ω 与 σ_0^2 适当小时，Q 与 δ 负相关，从而 V 在 $\delta=1$ 时达到最小值. 由此可见，与个体决策相比，社会计划者决策导致较低的福利. 因此可以说，社会计划者决策长于增长而短于福利. 这一结论与 4.2.2C 中的分析是一致的.

4.2.4 生产性公共开支

与福利性公共开支模型相对照，现在考虑公共开支具有纯生产效应的情况. 这两种模型具有明显的对偶性，下面将尽可能从一种与 4.2.3 小节相对照的形式展开对新模型的讨论，以获得更清晰的理解.

A. 模型与最优性条件

现在假设公共开支仅有生产效应而无福利效应，因而可沿用问题(1)的目标函数. 另一方面，因公共开支进入生产函数，个体的预算约束将显著改变. 与 4.2.3小节中的 $G=gK$ 相对应，令以 $H=hK$ 表示生产性的公共开支，$h>0$ 是外生参数. 与 G_p 相对应，令

$$H_p = H(k/K)^{\epsilon} = hk^{\epsilon}K^{\epsilon'}, \tag{56}$$

其中 $\epsilon\in[0,1]$ 是类似于 δ 的外部性指标：当 $\epsilon=0$ 时 $H_p=H$，公共开支具有最大的外部性；当 $\epsilon=1$ 时 $H_p=hk$ 完全取决于个体资本，外部性消失. 设个体的生产函数为

$$y = A(k+\theta_1 H_p), \tag{57}$$

其中 $A>0,\theta_1\geqslant 0$ 表示 H_p 在生产函数中的权重，当 $\theta_1=0$ 时 H_p 实际上失去生产效应.

个体预算约束方程(29)形式上保持不变，其中的 $\mathrm{d}y,\mathrm{d}R_b$ 与 $\mathrm{d}T$ 仍依式(30)，只是生产函数由 4.2.3 小节中的 $y=Ak$ 换成了式(57). 仍设 $k=\nu w, b=\nu' w$，则有

$$\mathrm{d}w = (\tau' y+\nu' rw - c\,\overline{\omega})\mathrm{d}t + w\mathrm{d}u,$$

其中

$$\mathrm{d}u = \nu'\mathrm{d}u_B + \tau'_1(y/w)\mathrm{d}u_Y. \quad (\text{对照式(31b)}) \tag{58}$$

于是，个体最优决策问题可表为

$$
\begin{cases}
\max\limits_{c,\nu} \mathrm{E}_0\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\rho t}U(c(t))\mathrm{d}t, & \text{(59a)}\\
\text{s.t.}\quad \mathrm{d}w = (\tau' y+\nu' rw-c\,\overline{\omega})\mathrm{d}t + w\mathrm{d}u,\quad w(0)=w_0. & \text{(59b)}
\end{cases}
$$

为写出问题(59)的最优性条件，首先利用 $y=A(k+\theta_1 hk^{\epsilon}K^{\epsilon'})$（依式(56)、

式(57))算出

$$\begin{cases}\dfrac{\partial y}{\partial \nu} = Aw\left[1 + \varepsilon h\theta_1\left(\dfrac{K}{k}\right)^{\epsilon'}\right],\\ \dfrac{\partial y}{\partial w} = A\nu\left[1 + \varepsilon h\theta_1\left(\dfrac{K}{k}\right)^{\epsilon'}\right].\end{cases} \tag{60}$$

以 $V(t,w)$ 记问题(59)的值函数，则它满足如下最优性条件：

$$\begin{cases} U' = \overline{\omega} V_w, & (61\text{a})\\ \left\{A\tau'\left[1 + \varepsilon h\theta_1\left(\dfrac{K}{k}\right)^{\epsilon'}\right] - r\right\}V_w + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \sigma_u^2}{\partial \nu} w V_{ww} = 0, & (61\text{b})\\ V_{tw} + \left\{A\nu\tau'\left[1 + \varepsilon h\theta_1\left(\dfrac{K}{k}\right)^{\epsilon'}\right] + \nu' r - \rho\right\}V_w & \\ \quad + \left(\dfrac{\tau' y}{w} + \nu' r - \mu\overline{\omega} + \sigma_u^2 + \dfrac{w}{2}\dfrac{\partial \sigma_u^2}{\partial w}\right) w V_{ww} + \dfrac{\sigma_u^2}{2} w^2 V_{www} = 0, & (61\text{c})\end{cases}$$

其中 $\mu = c/w$；式(61b)已用式(61a)作了简化.

由式(58)有

$$\sigma_u^2 = \nu'^2\sigma_B^2 + 2\nu'\tau'_1(y/w)\sigma_{BY} + \tau'^2_1(y/w)^2\sigma_Y^2.$$

利用式(60)对上式求导得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial \sigma_u^2}{\partial \nu} = & -\nu'\sigma_B^2 - \tau'_1\frac{y}{w}\sigma_{BY} + A\nu'\tau'_1\sigma_{BY}\left[1 + \varepsilon h\theta_1\left(\frac{K}{k}\right)^{\epsilon'}\right]\\ & + A\tau'^2_1\sigma_Y^2\left(\frac{y}{w}\right)\left[1 + \varepsilon h\theta_1\left(\frac{K}{k}\right)^{\epsilon'}\right],\end{aligned} \tag{62a}$$

$$\begin{aligned}\frac{w}{2}\frac{\partial \sigma_u^2}{\partial w} = & -\nu'\tau'_1\sigma_{BY}\left(\frac{y}{w}\right) + A\nu\nu'\tau'_1\sigma_{BY}\left[1 + \varepsilon h\theta_1\left(\frac{K}{k}\right)^{\epsilon'}\right]\\ & - \tau'^2_1\sigma_Y^2\left(\frac{y}{w}\right)^2 + A\nu\tau'^2_1\sigma_Y^2\left(\frac{y}{w}\right)\left[1 + \varepsilon h\theta_1\left(\frac{K}{k}\right)^{\epsilon'}\right].\end{aligned} \tag{62b}$$

如同在 4.2.3 小节中一样，在均衡时，上面的繁琐式子将大大简化.

B. 宏观均衡

如同在 4.2.3B 中一样，设在宏观均衡时 $k = K$，μ 与 ν 为常数，$H_p = H = hk$，

$$y = Y = Bk, \quad B = A(1 + \theta_1 h).$$

其次设 $V = aU(w)$ (参照 4.2.2B)，参数 a 满足

$$a\overline{\omega} = \mu^{-\sigma}. \quad (\text{用式 } 61(\text{a})) \tag{63}$$

在宏观均衡时，k 与 b 的增长方程为

$$\begin{cases} \mathrm{d}k = \mathrm{d}y - \mathrm{d}c - \mathrm{d}H, & (64\text{a})\\ \mathrm{d}b = b\mathrm{d}R_b + \mathrm{d}H - \mathrm{d}T. & (64\text{b})\end{cases}$$

与式(38)比较，此处只是将 dG 换成了 dH. 与式(37)相对照，H 的增长服从以下方程：

$$dH = H\mathrm{d}t + Y\mathrm{d}u_H, \tag{65}$$

其中 $\mathrm{d}u_H$ 是与 $\mathrm{d}u_Y$ 不相关的外生Brown 运动. 于是,可将方程组(64)改写成(对照式(38)′):

$$\begin{cases} \mathrm{d}k = (y - hk - c)\mathrm{d}t + y(\mathrm{d}u_Y - du_H), & (64\mathrm{a})' \\ \mathrm{d}b = (hk - \tau y + br - c\ \omega)\mathrm{d}t + b\mathrm{d}u_B + y(\mathrm{d}u_H - \tau_1 \mathrm{d}u_Y), & (64\mathrm{b})' \end{cases}$$

其中已代入 $k = K, y = Y$.

令 $\psi = w^{-1}\mathrm{E}[\mathrm{d}w/\mathrm{d}t]$, 则结合均衡条件(36)与方程组(64)′得

$$\begin{cases} \psi = B - h - \dfrac{\mu}{\nu} = r + \dfrac{\nu(h - B\tau) - \mu\omega}{\nu'}, & (66\mathrm{a}) \\ \mathrm{d}u = B(\mathrm{d}u_Y - \mathrm{d}u_H) = \mathrm{d}u_B + \dfrac{B\nu}{\nu'}(\mathrm{d}u_H - \tau_1 \mathrm{d}u_Y), & (66\mathrm{b}) \end{cases}$$

这正与式(39)相当(只是分别以 $B, h, \mathrm{d}u_H$ 取代了 $A, g, \mathrm{d}u_G$). 由方程(66b)得到对应于方程组(40)的公式:

$$\begin{cases} \nu'^2\sigma_B^2 = B^2[\sigma_H^2 + (1 - \nu\tau'_1)^2\sigma_Y^2], \\ \nu'\sigma_{BY} = B(1 - \nu\tau'_1)\sigma_Y^2, \\ \sigma_u^2 = B^2\sigma_0^2, \quad \sigma_0^2 = \sigma_H^2 + \sigma_Y^2. \end{cases}$$

将所得公式及 $y/w = B\nu$ 代入式(62)得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \sigma_u^2}{\partial \nu} = -\frac{B^2\sigma_\sigma^2}{\nu'} + \frac{B\tau'_1\sigma_Y^2}{\nu'}(B_1 + \phi), \tag{62a)'$$

$$\frac{w}{2}\frac{\partial \sigma_u^2}{\partial w} = -B\nu\tau'_1\phi\sigma_Y^2, \tag{62b)'$$

其中 $B_1 = A(1 + \epsilon h\theta_1), \phi = A\epsilon' h\theta_1$. 而与式(21)或式(42)相当的公式是

$$wV_{ww} = -\sigma V_w, \quad w^2V_{www} = \sigma\ \bar{\sigma}V_w.$$

作了上述准备之后,现在已可从式(61b)、式(61c)与式(66a)得出关键的结果:

$$\nu' r = B_1(\lambda - \nu\tau') + B^2\sigma\ \sigma_0^2 + (\lambda - \tau')\phi\nu, \quad \lambda = \tau' - B\sigma\tau'_1\sigma_Y^2. \tag{67}$$

$$\begin{cases} \mu\bar{\omega}\sigma = M + \lambda\sigma\phi\nu, \\ M = \rho - B_1\lambda\sigma' - \dfrac{B^2\sigma\ \sigma'\sigma_0^2}{2}; \end{cases} \tag{68}$$

$$\begin{cases} \mu(1 - \bar{\omega}\nu) = \nu(N - \lambda\phi\nu), \\ N = B - h - B_1\lambda - B^2\sigma\ \sigma_0^2. \end{cases} \tag{69}$$

联立方程(68)与方程(69)解出

$$\nu = M/F, \quad F = \bar{\omega}(M + \sigma N) - \lambda\sigma\phi; \tag{70}$$

$$\mu = D\nu/\sigma = DM/F\sigma, \quad D = M + \sigma N. \tag{71}$$

将 $\mu/\nu = D/\sigma$ 代入式(66a)得

$$\psi = B - h - \sigma^{-1}M - N. \tag{72}$$

类似于式(49),为保证 $\mu, \nu > 0$, 下面设

$$M > 0,\quad D > 0,\quad F > 0. \tag{73}$$

有充分理由认为,条件(73)并不构成对参数的严重限制,但此处不拟详细讨论了.

C. 福利分析

现在用4.2.3C 中的方法分析问题(59)中的参数的福利影响,看是否依然有效.

首先,类似于式(50)有

$$\begin{aligned}-\ln(\sigma' V) &= \sigma\ln\mu + \sigma'\ln\nu + \ln(\bar{\omega}k_0^{-\sigma'}) \\ &= \ln M + \sigma\ln D - \ln F + \ln(\bar{\omega}k_0^{-\sigma'}\sigma^{-\sigma}) \triangleq Q. \end{aligned} \tag{74}$$

设 s 是异于 σ,ω 的参数,则

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial s} + \frac{\sigma}{D}\frac{\partial D}{\partial s} - \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial s}; \tag{75}$$

因而方程 $\partial Q/\partial s = 0$ 相当于

$$DF\frac{\partial M}{\partial s} + \sigma FM\frac{\partial D}{\partial s} = DM\frac{\partial F}{\partial s}. \tag{76}$$

若方程(76)有唯一解 $s = s^*$,且当 $\partial Q/\partial s = 0$ 时 $\partial^2 Q/\partial s^2 < 0$,则 s^* 是对 s 的最优选择.原则上,此处的思路与4.2.3C 中的做法并无区别.但方程(76)更不容易求解,因而现在能得到的具体结论较少.下面考虑几个特殊参数以作说明.

(i) 设 $s = \tau$,则

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\tau} = -1,\quad \frac{\partial M}{\partial\tau} = B_1\sigma',\quad \frac{\partial N}{\partial\tau} = B_1 = \frac{\partial D}{\partial\tau},\quad \frac{\partial F}{\partial\tau} = B_1\bar{\omega} + \sigma\phi;$$

代入方程(76)得

$$B_1F(M + \sigma\sigma' N) = DM(B_1\bar{\omega} + \sigma\phi). \tag{77}$$

要从式(77)解出 $\tau = \tau^*$,方程有待进一步简化.

(ii) 取 $s = \sigma_H^2$,则

$$\frac{\partial M}{\partial\sigma_H^2} = -\frac{B^2\sigma\sigma'}{2},\quad \frac{\partial N}{\partial\sigma_H^2} = -B^2\sigma,\quad \frac{\partial D}{\partial\sigma_H^2} = -\frac{B^2\sigma\bar{\sigma}}{2},\quad \frac{\partial F}{\partial\sigma_H^2} = \bar{\omega}\frac{\partial D}{\partial\sigma_H^2};$$

代入方程(76)得

$$F(\sigma' D + \sigma\bar{\sigma}M) = DM\bar{\omega}\bar{\sigma}. \tag{78}$$

(iii) 取 $s = \varepsilon$,则

$$\frac{\partial B_1}{\partial\varepsilon} = Ah\theta_1 = -\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon},\quad \frac{\partial M}{\partial\varepsilon} = -Ah\theta_1\lambda\sigma',$$

$$\frac{\partial N}{\partial\varepsilon} = -Ah\theta_1\lambda = \frac{\partial D}{\partial\varepsilon},\quad \frac{\partial F}{\partial\varepsilon} = Ah\theta_1\lambda(\sigma - \bar{\omega});$$

代入方程(75)得

$$MDF\frac{\partial Q}{\partial\varepsilon} = -Ah\theta_1\lambda[\sigma' DF + \sigma MF + (\sigma - \bar{\omega})DM]. \tag{79}$$

式(77)～式(79)将在特殊情况下予以考虑.

D. 特殊情况

(i) 设 $\theta_1 = 0$，这意味着公共开支实际上不具生产效应，此时可依次得出

$$B = B_1 = A, \quad \phi = 0,$$

$$M = \rho - A\lambda\sigma' - \frac{A^2\sigma\,\sigma'\sigma_0^2}{2}; \quad (\text{用式(68)})$$

$$N = A\lambda' - h - A^2\sigma\,\sigma_0^2; \quad (\text{用式(69)})$$

$$\nu = M/D\overline{\omega}, \quad F = D\overline{\omega}; \quad (\text{用式(70)})$$

$$\mu = M/\sigma\overline{\omega}. \quad (\text{用式(71)})$$

方程(77)简化为 $N = 0$，由此解出

$$\tau^* = A^{-1}h + A\sigma(\sigma_H^2 + \tau_1\sigma_Y^2). \tag{80}$$

因

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\tau^2} = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{A\sigma'}{M} + \frac{A\sigma}{D} - \frac{A}{D}\right) = -\frac{A^2(D^2\sigma'^2 - M^2\sigma')}{D^2M^2} < 0,$$

故 τ^* 确为最优税率. 当 $0 < \tau < \tau^*$ 时，V 与 τ 正相关. 另一方面，由式(72)有 $\partial\psi/\partial\tau < 0$，可见 ψ 总与 τ 负相关.

(ii) 设 $\varepsilon = 1$，这意味着公共开支完全不具外部性. 此时依次有 $B = B_1, \phi = 0, F = \overline{\omega}D$；方程(77)同样归结为 $N = 0$，但解出的 τ^* 与式(80)略有不同：

$$\tau^* = B^{-1}h + B\sigma(\sigma_H^2 + \tau_1\sigma_Y^2). \tag{80$'$}$$

同样可验证 $\partial^2 Q/\partial\tau^2 < 0$，故 τ^* 确为最优税率.

(iii) 设 $\sigma_0^2 = 0$，即随机扰动消失. 此时依次有

$$\lambda = \tau',$$

$$M = \rho - B_1\sigma'\tau'; \quad (\text{用式(68)})$$

$$N = B\tau - h; \quad (\text{用式(69)})$$

$$F = \overline{\omega}D - \sigma\,\tau'\phi. \quad (\text{用式(70)})$$

在此基础上易得到 μ, ν, ψ 的较简单的公式，不必详述.

(iv) 设 $\sigma_0^2 = 0 = \tau = \omega$，则 $N = -h, F = D - \sigma\phi$，

$$-\frac{MDF}{Ah\theta}\frac{\partial Q}{\partial\varepsilon} = \sigma'DF + \sigma MF - \sigma'DM \quad (\text{用式(79)})$$

$$= \sigma MF - \sigma\,\sigma'D(h + \phi) > 0,$$

这表明 $\partial Q/\partial\varepsilon < 0$，即 V 与 ε 负相关. 于是有类似于4.2.3小节的结论：若 τ, ω, σ_0^2 适当小，则社会计划者决策(即 $\varepsilon = 1$ 时的个体决策)导致比个体决策较低的福利. 另一方面，由式(72)有

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial M}{\partial\varepsilon} - \frac{\partial N}{\partial\varepsilon} = \frac{Ah\theta\lambda}{\sigma} > 0 \quad (\sigma_Y^2\ \text{充分小}),$$

可见社会计划者决策导致较高的经济增长率. 类似的结论已经多次出现.

4.2.5 综合模型

无论说公共开支是福利性的还是生产性的，显然都有失片面. 实际上，公共开支必定既有福利性部分，又有生产性的基础设施投入. 因而，更恰当的做法是以一个综合模型来统一描述这两方面的效用. 不过，鉴于已建立的两个公共开支模型均用到颇繁琐的计算(参看4.3.3小节与4.3.4小节)，自然不应指望将要建立的综合模型会更简单些. 好在业已熟悉的思路依然可用，至于具体细节，则不妨处理得简略些.

A. 模型与最优性条件

综合模型的关键假设是：公共开支 Γ 被分割成互不重叠的两部分：福利性公共开支 $G(=gK)$ 与生产性公共开支 $H(=hK)$，因而 $\Gamma=\beta K$，$\beta=g+h$. 假设 G 与 H 互不重叠，这当然不尽合于现实，但如此较便于分析. 分别以 G_p 与 H_p 记进入个体效用函数与个体生产函数的公共开支，二者分别表为式(28)与式(56)；个体的期望折现效用与生产函数则分别依式(32a)与式(57). 于是，综合问题(32)与(59)，现在可将个体最优决策问题表为

$$\begin{cases} \max\limits_{c,\nu} \mathrm{E}_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}U(c(t)G_p^\theta(t))\mathrm{d}t, & (81\mathrm{a}) \\ \text{s.t.} \quad \mathrm{d}w=(\tau' y+\nu' rw-c\,\overline{\omega})\mathrm{d}t+w\mathrm{d}u, \quad w(0)=w_0. & (81\mathrm{b}) \end{cases}$$

注意：式(81a)与式(81b)分别重合于式(32a)与式(50b)；式(81b)中，$y=A(k+\theta_1 hk^{\varepsilon}K^{\varepsilon'})$，而 $\mathrm{d}u$ 则依式(58).

问题(81)的最优性条件是式(33)与式(61)的某种综合：

$$\begin{cases} U'G_p^\theta=\overline{\omega}V_w, & (82\mathrm{a}) \\ \left\{\dfrac{\mu\overline{\omega}\delta\theta}{\nu}+A\tau'\left[1+\varepsilon h\theta_1\left(\dfrac{K}{k}\right)^{\varepsilon'}\right]-r\right\}V_w+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial\nu}wV_{ww}=0, & (82\mathrm{b}) \\ V_{rw}+\left\{\mu\overline{\omega}\delta\theta+A\nu\tau'\left[1+\varepsilon h\theta_1\left(\dfrac{K}{k}\right)^{\varepsilon'}\right]+\nu' r-\rho\right\}V_w & \\ \quad+\left(\dfrac{\tau' y}{w}+\nu' r-\mu\overline{\omega}+\sigma_u^2+\dfrac{w}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial w}\right)wV_{ww}+\dfrac{\sigma_u^2}{2}w^2V_{www}=0, & (82\mathrm{c}) \end{cases}$$

其中 $\mu=c/w$，$\partial\sigma_u^2/\partial\nu$ 与 $\partial\sigma_u^2/\partial w$ 仍依式(62).

B. 宏观均衡

如同在4.2.3小节与4.2.4小节中一样，设在宏观均衡时 $k=K$，μ，ν 为常数，$G_p=G=gk$，$H_p=H=hk$，$\Gamma=\beta k$，$y=Y=Bk$；如同在4.2.4小节中一样，$B=A(1+\theta_1 h)$；如同在4.2.3小节中一样，设 $V=aU(w^{\vartheta})$，其中 a 满足式(35).

类似于式(37)与式(65)，设

$$\mathrm{d}\Gamma=\Gamma\mathrm{d}t+Y\mathrm{d}u_\Gamma, \tag{83}$$

其中 du_Γ 是与 du_Y 不相关的外生Brown 运动. 分别以 β, du_Γ 取代式(64)′中的 h, du_H, 得出均衡时的资产增长方程:

$$\begin{cases} dk = (y - \beta k - c)dt + y(du_Y - du_\Gamma), & (84a) \\ db = (\beta k - \tau y + br - c\omega)dt + bdu_B + y(du_\Gamma - \tau_1 du_Y). & (84b) \end{cases}$$

基于方程(84),宏观均衡条件(66)现在应修改为

$$\begin{cases} \psi = B - \beta - \dfrac{\mu}{\nu} = r + \dfrac{\nu(\beta - B\tau) - \mu\omega}{\nu'}, & (85a) \\ du = B(du_Y - du_\Gamma) = du_B + \dfrac{B\nu}{\nu'}(du_\Gamma - \tau_1 du_Y). & (85b) \end{cases}$$

同样,条件(85b)推出对应于式(40)的如下公式:

$$\nu'^2\sigma_B^2 = B^2[\sigma_\Gamma^2 + (1 - \nu\tau'_1)^2\sigma_Y^2],$$

$$\nu'\sigma_{BY} = B(1 - \nu\tau'_1)\sigma_Y^2,$$

$$\sigma_u^2 = B^2(\sigma_\Gamma^2 + \sigma_Y^2) \triangleq B^2\sigma_0^2.$$

因此,式(62)′仍然可用,只是其中 $\sigma_0^2 = \sigma_\Gamma^2 + \sigma_Y^2$, 而 ϕ, B_1 如同式(62)′中一样. 仿照式(41)设

$$\begin{cases} \gamma = \delta\theta + 1/\overline{\omega}, \quad \xi = \delta\theta + 1, \quad q = 1 - \overline{\theta}\sigma', \\ Z = q + \delta\theta\overline{\omega}, \quad \lambda = \tau' - Bq\tau'_1\sigma_Y^2, \end{cases} \tag{86}$$

则式(42)成立;进而从式(82b)、式(82c)、式(85a)依次推出

$$\nu' r = \mu\overline{\omega}\delta\theta\nu^{-1}\nu' + B_1(\lambda - \nu\tau') + B^2 q\sigma_0^2 + (\lambda - \tau')\nu\phi,$$

$$\begin{cases} \mu\overline{\omega}(q\xi\nu + \delta\theta q') = \nu(M + \lambda q\phi\nu), \\ M = \rho - B_1\lambda q' - \dfrac{1}{2}B^2 qq'\sigma_0^2; \end{cases} \tag{87}$$

$$\begin{cases} \mu\overline{\omega}(\gamma - \xi\nu) = \nu(N - \lambda\phi\nu), \\ N = B - \beta - B_1\lambda - B^2 q\sigma_0^2. \end{cases} \tag{88}$$

联立方程(87)与方程(88)解出

$$\nu = E/F, \quad E = \gamma M - \delta\theta q' N, \quad F = \xi(M + qN) - \lambda\phi Z/\overline{\omega}; \tag{89}$$

$$\mu = D\nu/Z = DE/FZ, \quad D = M + qN. \tag{90}$$

然后以 $\mu/\nu = D/Z$ 代入式(85a)得

$$\psi = B - \beta - Z^{-1}(M + qN). \tag{91}$$

类似于式(49)与式(73),为保证 $\mu, \nu > 0$, 下面假定

$$D > 0, \quad E > 0, \quad F > 0. \tag{92}$$

因沿用了 4.2.3 小节中的值函数,故式(50)依然可用. 结合式(50)与式(89)、式(90)得

$$Q = \sigma\ln D + \ln E - \ln F - \theta\sigma'\ln g + \ln(\overline{\theta}\overline{\omega}k_0^{-q'}Z^{-\sigma}).$$

若 s 是异于 $\delta, \theta, \sigma, \omega$ 的参数,则

$$\frac{\partial Q}{\partial s}=\frac{\sigma}{D}\frac{\partial D}{\partial s}+\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial s}-\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial s}-\frac{\theta\sigma'}{g}\frac{\partial g}{\partial s},\tag{93}$$

这与式(75)相当(取 $\theta=0$ 从式(93)得出式(75)). 考虑到在4.2.4小节中式(75)并不带来明确的具体结果，除非限定特殊的参数，一般不能指望仅依赖于式(93)进行有效的福利分析. 因此，下面转入对特殊情况的讨论.

C. 特殊情况

问题(81)具有高度的综合性，它涵盖了多种特殊情况. 我们首先关注的是，综合模型是否包含4.2.3小节与4.2.4小节中的模型为其特殊情况？下面分别考虑.

(i) 设 $\theta_1=0$，这意味着公共开支实际上并无生产效应，因而不妨进而设 $h=0$. 此时依次有 $\phi=0, B=B_1=A$，

$$M=\rho-A\lambda q'-\frac{1}{2}A^2qq'\sigma_0^2;\qquad\text{(用式(87))}$$

$$N=A\lambda'-g-A^2q\sigma_0^2;\qquad\text{(用式(88))}$$

$$\nu=E/\xi D,\quad F=\xi D;\qquad\text{(用式(89))}$$

$$\mu=E/\xi Z;\qquad\text{(用式(90))}$$

$$\psi=A-\beta-Z^{-1}(M+qN);\qquad\text{(用式(91))}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s}=\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial s}-\frac{\sigma'}{D}\frac{\partial D}{\partial s}-\frac{\theta\sigma'}{g}\frac{\partial g}{\partial s}.\qquad\text{(用式(93))}$$

与式(44)～式(51)对照可以看出，只要将 σ_F^2 换成 σ_G^2，以上结果就完全重合于4.2.3小节中的相应公式. 由此可见，当 $\theta_1=0$ 时问题(81)归结于问题(32).

(ii) 设 $\theta=0$，这意味着公共开支实际上并无福利效应，因而不妨进而设 $g=0$. 此时依次有 $\gamma=1/\varpi, \xi=1, q=\sigma=Z$，

$$M=\rho-B_1\lambda\sigma'-\frac{1}{2}B^2\sigma\sigma'\sigma_0^2,\qquad\text{(用式(87))}$$

$$N=B-h-B_1\lambda-B^2\sigma\sigma_0^2,\qquad\text{(用式(88))}$$

$$\nu=M/\varpi F,\ E=M/\varpi,\quad F=D-\lambda\sigma\phi/\varpi;\qquad\text{(用式(89))}$$

$$\mu=DM/F\sigma\varpi,\quad D=M+\sigma N;\qquad\text{(用式(90))}$$

$$\psi=B-h-\sigma^{-1}M-N;\qquad\text{(用式(91))}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s}=\frac{\sigma}{D}\frac{\partial D}{\partial s}+\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial s}-\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial s}.\qquad\text{(用式(93))}$$

与式(68)～式(75)对照可以看出，只要将 σ_F^2 换成 σ_H^2，以上结果就完全重合于4.2.4小节中的相应公式. 这就表明，取 $\theta=0$ 将问题(81)转化为问题(59).

(iii) 取 $\sigma_0^2=0$，这意味着随机扰动消失. 此时依次有 $\lambda=\tau'$，

$$M=\rho-B_1q'\tau',\qquad\text{(用式(87))}$$

$$N=B-\beta-B_1\tau',\qquad\text{(用式(88))}$$

$$D = \rho - B_1\tau' + q(B - \beta), \qquad (\text{用式}(90))$$
$$E = \gamma\rho - \delta\theta q'(B - \beta) - B_1 q'\tau'/\bar{\omega}. \quad (\text{用式}(89))$$

利用这些已大大化简的公式，可以写出直接用参数表出 μ,ν,ψ 的公式，这些读者均不难自行完成.

参考文献

[1] Abel A B, Bernanke B S. Macroeconomics[M]. 2nd ed., New York: Addison-Wesley, 1995.

[2] Aschauer D A. Fiscal policy and aggregate demand[J]. Amer. Eco. Rev., 1985, 75: 117-127.

[3] Aschauer D A. Is public expenditure productive[J]? J. Monetary Eco., 1989, 23: 177-200.

[4] Barro R J. Government spending, interest rates, prices and budget deficits in the United Kingdom, 1701～1918[J]. J. Monetary Eco., 1987, 20: 221-247.

[5] Barro R J. Government spending in a simple model of endogenous growth[J]. J. Political Eco., 1990, 98: 103-125.

[6] Barro R J, Xavier S M. Public finance in models of economic growth[J]. Rev. Eco. Studies, 1992, 59: 654-661.

[7] Baxter M, King R G. Fiscal policy in general equilibrium[J]. Amer. Eco. Rev., 1993, 83: 315-334.

[8] Benhabib J, Perli R. Uniqueness and indeterminacy: transitional dynamics in a model of endogenous growth[J]. J. Eco. Theory, 1994, 63: 113-142.

[9] Bruce N, Turnovsky S J. Budget balance, welfare and the growth rate[J]. J. Money, Credit & Banking, 1999, 31: 162-186.

[10] Chamley C. Efficient taxation in a stylized model of intertemporal general equilibrium[J]. Intern. Eco. Rev., 1985, 26: 451-468.

[11] Chamley C. Optimal taxation of capital income in general equilibrium with infinite lives[J]. Econometrica, 1986, 54: 607-622.

[12] Cole H, Mailath G, Postlewaite A. Social norms, saving behavior and growth[J]. J. Political Eco., 1992, 100: 1092-1125.

[13] Cuoco D. Optimal consumption and equilibrium prices with portfolio constraints and stochastic income[J]. J. Eco. Theory, 1997, 72: 33-73.

[14] Cuoco D, Cvitanic J. Optimal consumption choices for a "large" investor [J]. J. Eco. Dyn. Control, 1998, 22: 401-436.

[15] Devarajan S, Swaroop V, Zou H. The composition of public expenditure and economic growth[J]. J. Monetary Eco., 1996, 37: 313-344.

[16] Easterly W, Rebelo S. Fiscal policy and economic growth: an empirical investigation[J]. J. Monetary Eco., 1993, 32: 417-458.

[17] Eaton J. Fiscal policy, inflation and the accumulation of risky capital [J]. Rev. Eco. Studies, 1981, 48: 435-445.

[18] Eicher T S, Turnovsky S J. Scale congestion and growth[J]. Econometria, 2000, 67: 325-346.

[19] Fleming W H, Stein J L. Stochastic optimal control, international finance and debt[J]. J. Banking & Finance, 2004, 28: 979-996.

[20] Futagami K, Murata Y, Shibata A. Dynamic analysis of an endogenous growth model with public capital[J]. Scand. J. Eco., 1993, 95: 607-625.

[21] Giancarlo C. A portfolio approach to endogenous growth: equilibrium and optimal policy[J]. J. Eco. Dyn. Control, 1997, 21: 1627-1644.

[22] Gokan Y. Alternative government financing and stochastic endogenous growth[J]. J. Eco. Dyn. Control, 2002, 26: 681-706.

[23] Gordon R. An optimal taxation approach to fiscal federalism[J]. Q. J. Eco., 1983, 98: 567-586.

[24] Jones L E, Manuelli R E, Rossi P E. Optimal taxation in models of endogenous growth[J]. J. Political Eco., 1993, 101: 485-517.

[25] Judd K L. The welfare cost of factor taxation in a perfect-foresight model[J]. J. Political Eco., 1987, 95: 675-709.

[26] King R G, Rebelo S. Public policy and economic growth: developing neoclassical implications[J]. J. Political Eco., 1990, 98: S126-S150.

[27] Lin H C, Russo B. A taxation policy toward capital, technology and long-run growth[J]. J. Monetary Eco., 1999, 21: 463-491.

[28] Maddison A. A long-run perspective on saving [J]. Scand. J. Eco., 1992, 94: 181-196.

[29] Ramsey F. A mathematical theory of saving[J]. Eco. J., 1928, 38: 543-559.

[30] Rebelo S. Long-run policy analysis and long-run growth[J]. J. Political Eco., 1991, 99: 500-521.

[31] Reiter M. Solving higher-dimensional continuous-time stochastic control

problem by value function regression[J]. J. Eco. Dyn. Control, 1999, 23: 1329-1353.

[32] Saint-Paul G. Fiscal policy in an endogenous growth model[J]. Q. J. Eco., 1992, 107: 1243-1259.

[33] Samuelson P. Theory of optimal taxation[J]. J. Public Eco., 1986, 30: 137-143.

[34] Smith W T. Feasibility and transversality condition for models of portfolio choice with non-expected utility in continuous time[J]. Eco. Letters, 1996, 53: 123-131.

[35] Smith W T. Taxes, uncertainty and long-run growth[J]. European Eco. Rev., 1996, 40: 1647-1664.

[36] Smith W T. Risk, the spirit of capitalism and growth: the implications of a preference for capital[J]. J. Macroeco., 1999, 21: 241-262.

[37] Stokey N, Rebelo R. Growth effects of flat-rate taxes[J]. J. Political Eco., 1995, 193: 519-550.

[38] Svensson L E O. Portfolio choice with non-expected utility in continuous time[J]. Eco. Letters, 1989, 30: 313-317.

[39] Turnovsky S J. Macroeconomic policies, growth and welfare in a stochastic economy[J]. Intern. Eco. Rev., 1993, 35: 953-981.

[40] Turnovsky S J. Optimal tax, debt and expenditure policies in an growing economy[J]. J. Publ. Eco., 1996, 60: 21-44.

[41] Turnovsky S J. On the role of government in a stochastically growing open economy[J]. J. Eco. Dyn. Control, 1999, 23: 873-908.

[42] Turnovsky S J. Fiscal policy, elastic labor supply and endogenous growth[J]. J. Monetary Eco., 2000, 45: 185-210.

[43] Turnovsky S J. Government policy in a stochastic growth model with elastic labor supply[J]. J. Publ. Eco. Theor., 2000, 2: 389-433.

[44] Turnovsky S J, Fisher W H. The composition of government expenditure and its consequences for macroeconomic performance[J]. J. Eco. Dyn. Control, 1995, 19: 747-786.

[45] Turalay K. Taxation, risk-taking and growth: a continuous-time stochastic general equilibrium analysis with labor-leisure choice[J]. J. Eco. Dyn. Control, 2004, 28: 1511-1539.

[46] Weil P. Overlapping families of infinitely lived agents[J]. J. Publ. Eco., 1989, 38: 183-198.

[47] Weil P. Non-expected utility in macroeconomics[J]. Q. J. Eco., 1990, 105:29-42.
[48] Zou H F. The spirit of capitalism and long-run growth[J]. European J. Political Eco., 1994, 10:279-293.
[49] Zou H F. The spirit of capitalism and saving behavior[J]. J. Eco. Behavior & Organ., 1995, 28:131-143.
[50] Zou H F. The spirit of capitalism, social status, money and accumulation [J]. J. Eco., 1998, 68:219-233.
[51] Zhu X. Optimal fiscal policy in a stochastic growth model[J]. J. Eco. Theory, 1992, 58:250-289.

4.3 教育·人力资本与技术

在公用事业中，最重要者大概莫过于教育了. 就其兼具福利效应与生产效应而言，教育似乎可归入4.2.5小节所描述的公共事业. 但很明显，个体出于私人的目的亦大量投资于教育. 教育的产出是人力资本. 以h记个体从教育中获得的人力资本，它的计量及其与投资的关系都是难于严格描述的问题. 本节采用如下Cobb-Douglas型函数：

$$h = (\varepsilon k)^{\delta} G^{\delta'} = \varepsilon^{\delta} g^{\delta'} k (K/k)^{\delta'}, \tag{1}$$

其中εk与$G = gK$分别为个体教育投资与公共教育投资，$\varepsilon \in (0,1)$是个体资本用于教育的份额，$\delta \in [0,1]$是一个外部性指标. 在现代社会中，除了获得谋生的能力之外，教育也应看作一种高雅的消费，受教育者因其知书达理及被人尊重而获得种种美好感受. 因此，作为受教育水平标志的h进入效用函数看来是不成问题的. 仿照4.2节中的设定，本节设个体期望折现效用为

$$V = \mathrm{E}_0 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho t} U(c(t) h^{\theta}(t)) \mathrm{d}t,$$

其中$U(\cdot)$是参数$\sigma > 1$的CRRA效用函数，$\theta \geqslant 0$是刻画教育福利效应的权重. 至于个体的生产函数，则可考虑如下两种不同的选择：

$$y = A(\varepsilon' k)^{\alpha} h^{\alpha'} \quad (0 < \alpha < 1) \tag{2}$$

与

$$y = A(\varepsilon' k + \theta_1 h) \quad (\theta \geqslant 0). \tag{3}$$

对这两种不同情况下面将分别予以考虑.

从社会学的观点看来，教育与技术自然有很大差别；但就其与经济发展的关系而言，二者却有许多相似之处. 例如，发展教育与开发技术都要消耗一定经济资源，都依赖于个体或政府的投入，都有利于经济增长，且对经济的推动力日趋

明显.鉴于此,在本节中同时考虑技术的作用是很自然的.不过,技术发展过程非常复杂,本节的分析只是初步的.

4.3.1 乘性生产函数情形

首先采用似乎更合于传统的生产函数(2).假定 ϵ 为外生参数,这意味着个体在投资教育时是完全被动的:他只是遵循由习俗形成的教育投资比例 ϵ 而已,而不考虑 ϵ 的选择对于效用的影响.这一设定有助于简化对模型的分析.

A. 模型与最优性条件

如同在4.2节中一样,设个体资产为 $w = k + b, k = \nu w$ 与 $b = \nu' w$ 分别为物质资本存量与政府债券.个体的预算约束可在4.2.3小节的基础上作少许修改得出:只需将4.2节式(32b)中的消费 c 代以 $c + \epsilon k$,形式上看,这相当于将教育花费 ϵk 当作了一种消费.其次,为更便于分析,假定政府仅对确定性收入 y 征税,税率为 τ.于是,个体最优决策问题可表为(对照4.2节式(32))

$$\begin{cases} \max\limits_{c,\nu} \mathrm{E}_0 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t} U(c(t)h^\theta(t))\mathrm{d}t, & (4\mathrm{a}) \\ \text{s.t.} \quad \mathrm{d}w = (\tau' y + br - c - \epsilon k)\mathrm{d}t + w\mathrm{d}u, \quad w(0) = w_0, & (4\mathrm{b}) \end{cases}$$

其中

$$\mathrm{d}u = \nu' \mathrm{d}u_B + (y/w)\mathrm{d}u_Y. \tag{5}$$

注意式(5)正好由4.2节式(58)令 $\tau_1 = 0$ 得到.

问题(4)的Bellman方程为

$$\rho V = U(ch^\theta) + V_t + (\tau' y + br - c - \epsilon k)V_w + \frac{\sigma_u^2}{2} w^2 V_{ww}.$$

为便于由此写出问题的最优性条件,先注意到

$$y = A\epsilon^{\alpha'\delta}\epsilon'^{\alpha} g^{\beta'} k^\beta K^{\beta'}, \qquad (\text{用式(1)、式(2)}) \tag{2$'$}$$

其中 $\beta = \alpha + \alpha'\delta = \delta + \alpha\delta' \in [\alpha, 1], \beta' = \alpha'\delta'$.直接算出

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = \frac{\beta y}{\nu}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{\beta y}{w}; \qquad (\text{用式(2)}')$$

$$\frac{\partial h}{\partial \nu} = \frac{\delta h}{\nu}, \quad \frac{\partial h}{\partial w} = \frac{\delta h}{w}. \qquad (\text{用式(1)})$$

现在已易写出问题(4)的最优性条件

$$\begin{cases} U'(ch^\theta)h^\theta = V_w, & (6\mathrm{a}) \\ \left(\dfrac{\mu\delta\theta}{\nu} + \dfrac{\beta\tau' y}{k} - \epsilon - r\right)V_w + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \sigma_u^2}{\partial \nu} w V_{ww} = 0, & (6\mathrm{b}) \\ V_{tw} + \left(\mu\delta\theta + \dfrac{\beta\tau' y}{w} - \epsilon\nu + \nu' r - \rho\right)V_w & \\ \quad + \left(\dfrac{\tau' y}{w} - \mu - \epsilon\nu + \nu' r + \sigma_u^2 + \dfrac{w}{2}\dfrac{\partial \sigma_u^2}{\partial w}\right) w V_{ww} + \dfrac{\sigma_u^2}{2} w^2 V_{www} = 0, & (6\mathrm{c}) \end{cases}$$

其中 $\mu = c/w$，

$$\sigma_u^2 = \nu'^2\sigma_B^2 + 2\nu'(y/w)\sigma_{BY} + (y/w)^2\sigma_Y^2, \qquad (用式(5))$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial\nu} = -\nu'\sigma_B^2 - \dfrac{y}{w}\sigma_{BY} + \dfrac{\beta y}{k}\left(\nu'\sigma_{BY} + \dfrac{y}{w}\sigma_Y^2\right), \\ \dfrac{w}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial w} = -\dfrac{\nu' y}{w}\sigma_{BY} - \left(\dfrac{y}{w}\right)^2\sigma_Y^2 + \dfrac{\beta y}{w}\left(\nu'\sigma_{BY} + \dfrac{y}{w}\sigma_Y^2\right). \end{cases} \tag{7}$$

B. 宏观均衡

依照已熟知的做法(参照小节 4.2.3～4.2.5)，设在宏观均衡时 $k = K, \mu, \nu$ 为常数，$V = aU(w^{\vartheta})$. 于是

$$h = \varepsilon^{\delta}g^{\delta'}k, \quad y = Y = Bk, \quad B = A\epsilon^{\alpha'\delta}\epsilon'^{a}g^{\beta'}. \quad (用式(1)、式(2)')$$

为写出均衡时 k 与 b 的动态平衡方程，假定 $G = gK$ 完全用于公共教育支出，此外不再有其他的公共开支，以便使模型的关注点集中在教育上. 这样，可直接移用 4.2 节中的方程组(38)′，只是令其中的 τ_1, ω 为零，以 $c + \varepsilon k$ 代 c，得到

$$\begin{cases} dk = (y - gk - c - \varepsilon k)dt + y(du_Y - du_G), \\ db = (gk - \tau y + br)dt + bdu_B + ydu_G. \end{cases} \tag{8}$$

如同在 4.2.3 小节中一样，假定 du_G 与 du_Y 是外生的 Brown 运动且互不相关；r 与 du_B 对于个体是给定的，但最终将由模型内生地确定. 结合式(8)与均衡条件 $dk/k = db/b$ (见 4.2 节式(36))得出

$$\begin{cases} \psi = B - g - \varepsilon - \dfrac{\mu}{\nu} = r + \dfrac{\nu}{\nu'}(g - B\tau), & (9a) \\ du = B(du_Y - du_G) = du_B + \dfrac{B\nu}{\nu'}du_G, & (9b) \end{cases}$$

其中 $\psi = w^{-1}\mathrm{E}[dw/dt]$ 是均衡增长率. 由方程(9b)推出

$$\nu'^2\sigma_B^2 = B^2(\sigma_G^2 + \nu'^2\sigma_Y^2), \quad \sigma_{BY} = B\sigma_Y^2,$$

$$\sigma_u^2 = B^2\sigma_0^2, \quad \sigma_0^2 = \sigma_G^2 + \sigma_Y^2.$$

将以上结果代入式(7)，得出均衡时有

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial\nu} = -\dfrac{B^2\sigma_G^2}{\nu'} - B^2\beta'\sigma_Y^2, \\ \dfrac{w}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial w} = -B^2\beta'\nu\sigma_Y^2. \end{cases} \tag{7$'$}$$

仿照 4.2 节式(41)，约定如下复合参数：

$$\begin{cases} \xi = \delta\theta + 1, \quad q = 1 - \bar{\theta}\sigma', \quad \lambda = \tau' - Bq\sigma_Y^2, \\ \phi = B\beta'\lambda, \quad Z = q + \delta\theta. \end{cases} \tag{10}$$

作了以上准备之后，现在已可利用最优性条件得出各均衡值. 由式(6a)～式(6c)、式(9a)(并结合式(7)′，4.2 节式(42))依次得出

$$a\overline{\theta}\mu^{\sigma} = (\varepsilon^{\delta} g^{\delta'} \nu)^{\theta\sigma'};\qquad \text{(用式(6a))} \quad (11)$$

$$\nu' r = \frac{\mu\delta\theta\nu'}{\nu} + B^2 q\sigma_0^2 + B\beta\lambda - \varepsilon + \nu(B\beta'\lambda - B\tau' + \varepsilon);\quad \text{(用式(6b))} \quad (12)$$

$$\begin{cases}\mu(\xi q\nu + \delta\theta q') = \nu(M + q\phi\nu), & \text{(用式(6c))}\\ M = \rho - B\beta\lambda q' + \varepsilon q' - \dfrac{1}{2}B^2 q q' \sigma_0^2; & \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases}\mu\xi\nu' = \nu(N - \phi\nu), & \text{(用式(9a))}\\ N = B - g - B\beta\lambda - B^2 q\ \sigma_0^2. & \end{cases} \quad (14)$$

联立方程(13)与方程(14)解出

$$\nu = E/F,\quad E = \xi M - \delta\theta q' N,\quad F = \xi(M + qN) - \phi Z; \quad (15)$$

$$\mu = D\nu/Z = DE/FZ,\quad D = M + qN. \quad (16)$$

然后以 $\mu/\nu = D/Z$ 代入式(11a)得到均衡增长率：

$$\psi = B - g - \varepsilon - Z^{-1}(M + qN). \quad (17)$$

如同在4.2节中一样，可用一个形如4.2节式(92)的条件保证 $\mu,\nu > 0$. 下面假定这样的条件已经满足.

若令 $V = V(k_0/\nu)$，则用式(11)可得类似于4.2节式(74)的公式：

$$\begin{aligned}-\ln(\sigma' V) &= \sigma\ln D + \ln E - \ln F - \delta\theta\sigma'\ln\varepsilon\\ &\quad - \delta'\theta\sigma'\ln g + \ln(\overline{\theta}k_0^{-q'} Z^{-\sigma}) \triangleq Q.\end{aligned} \quad (18)$$

利用式(18)可如同4.2节中一样进行福利分析. 不过，鉴于 D,E,F 的表达式都不简单，很难在如此一般的条件下得出具体结果. 因此，转向考虑某些特殊情况.

C. 参数 τ,ε 的作用

设 $\theta = 0$，则 h 不进入效用函数，这意味着教育还停留在主要为生存技能训练服务的低水平阶段，它无助于增进个体快乐. 相应地，h 对于生产的作用也是次要的，因而 α 接近于1. 为简化计算，暂时设 $\alpha = 1, \sigma_0^2 = 0$，于是

$B = A\varepsilon',\quad \xi = 1,\quad q = \sigma = Z,\quad \lambda = \tau',\quad \phi = 0;$ (用式(10))

$M = \rho - B\sigma'\tau' + \varepsilon\sigma' = E;$ (用式(13)、式(15))

$N = B\tau - g;$ (用式(14))

$\nu = M/D,\quad \mu = M/\sigma,\quad F = D;$ (用式(15)、式(16))

$\psi = A\varepsilon' - g - \varepsilon - \sigma^{-1}M - N.$ (用式(17))

(i) τ 的作用. 算出 $\dfrac{\partial M}{\partial \tau} = B\sigma', \dfrac{\partial N}{\partial \tau} = B = \dfrac{\partial D}{\partial \tau}$，于是

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial \tau} - \frac{\sigma'}{D}\frac{\partial D}{\partial \tau} = \frac{B\sigma'}{M} - \frac{B\sigma'}{D};\qquad \text{(用式(18))}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \tau^2} = -\frac{(B\sigma')^2}{M^2} + \frac{B^2\sigma'}{D^2} < 0;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial D}{\partial \tau} = -\frac{B}{\sigma} < 0. \qquad (用式(17))$$

可见 $\partial Q/\partial \tau = 0$ 相当于 $M = D$，即 $N = 0$；由此得出最优税率

$$\tau^* = \frac{g}{B} = \frac{g}{A\varepsilon'}.$$

当 $\tau < \tau^*$ 或 $\tau > \tau^*$ 时，V 分别与 τ 正相关或负相关. 而 $\partial\psi/\partial\tau < 0$ 表明 ψ 总与 τ 负相关. 这就得出：在低税率段 $(0 < \tau < \tau^*)$，对收入征税有益于福利但有碍于增长；高额征税无论对于福利与对于增长都是有害的.

(ii) ε 的作用. 算出

$$\frac{\partial B}{\partial \varepsilon} = -A, \quad \frac{\partial M}{\partial \varepsilon} = \sigma'(A\tau' + 1),$$

$$\frac{\partial N}{\partial \varepsilon} = -A\tau, \quad \frac{\partial D}{\partial \varepsilon} = \bar{A}\sigma' - A\tau.$$

于是

$$\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial \varepsilon} - \frac{\sigma'}{D}\frac{\partial D}{\partial \varepsilon} = \frac{\sigma'(A\tau' + 1)}{M} - \frac{\sigma'(\bar{A}\sigma' - A\tau)}{D}, \quad (用式(18))$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \varepsilon^2} = -\frac{1}{M^2}\left(\frac{\partial M}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \frac{\sigma'}{D^2}\left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}\right)^2 < 0;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = -\frac{A\tau' + 1}{\sigma} < 0. \qquad (用式(17))$$

因此 $\partial Q/\partial \varepsilon = 0$ 相当于 $(A\tau' + 1)D = (\bar{A}\sigma' - A\tau)M$，即

$$\bar{A}M = -(A\tau' + 1)N,$$

由此解出最优的 $\varepsilon = \varepsilon^*$，其中

$$\varepsilon^* = \frac{\bar{A}(\rho - A\sigma'\tau') + (A\tau - g)(A\tau' + 1)}{(A\tau' + 1)(A\tau - \bar{A}\sigma')}.$$

可验证 $0 < \varepsilon^* < 1$（若 g 不太大）. 于是与 τ 的情形类似：当 $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ 时，增加私人教育投入有益于福利但有碍于增长；过大的私人教育投入对于福利与增长均无好处.

以上结论虽然是对极端情形得出的，但其适用范围显然可以适当放大，综合的结论如下.

命题1　若 θ, σ_0^2 与 α' 适当小（这意味着教育只有轻微的福利效应，生产与公共开支仅有轻微波动，人力资本在生产中的作用偏低），则存在最优税率 τ^* 与最优私人教育投资率 ε^*；在低税率与低教育投入段，增大征税（或私人教育投入）有益于福利但有碍于增长；过高的税收（或私人教育投入）对于福利与增长均无好处.

以上结论表明，ε, τ 对于福利与增长的作用是类似的. 在 ε 与 τ 的低水平阶段（现实情况通常如此，下面保持这一假定），若要提高经济增长率，在其他条件

不变的情况下,应当降低私人教育投资或者降低税率;若要提高居民福利(当然指长期福利,即期望折现总效用,今后说及福利时总保持这一理解),则应当提高私人教育投资或者提高税率.

一个更精细的问题是:为提高增长率或居民福利,调节私人教育投入与税收这两者哪个的效果更显著?这相当于以下问题:在 ε 与 τ 两者之中,Q 或 ψ 对哪一个的变化更敏感?显然,此问题应通过比较 Q(或 ψ)对 ε 与 τ 的弹性来回答.由前面的计算已知 $\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}>0,\frac{\partial Q}{\partial \tau}>0,\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}<0,\frac{\partial \psi}{\partial \tau}<0$. 今估计

$$\begin{aligned}
&DM\left(\varepsilon\left|\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}\right|-\tau\left|\frac{\partial Q}{\partial \tau}\right|\right)\\
&=\varepsilon\sigma'[D(A\tau'+1)-M(\overline{A}\sigma'-A\tau)]-B\sigma'(D-M)\\
&=\varepsilon\sigma'[\overline{A}M\sigma+N\sigma(A\tau'+1)]-A\varepsilon'\sigma\sigma'N\\
&=\sigma\sigma'[\overline{A}\varepsilon(M+N)-AN(1-\varepsilon\tau')]\triangleq I_1;
\end{aligned}$$

$$\sigma\left(\varepsilon\left|\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}\right|-\tau\left|\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right|\right)=\varepsilon(A\tau'+1)-B\tau=A(\varepsilon-\tau)+\varepsilon\triangleq I_2.$$

因已设定 $M>0,D=M+\sigma N>0$(参考4.2节式(92)),故

$$M+N=\sigma^{-1}(D-\sigma'M)>0.$$

通常 $G=gK$ 不至于过分偏离税收 $\tau Y=B\tau K$,因而不妨认为 $N\leqslant 0$ 或者

$$|N|=|B\tau-g|$$

偏小[①]. 这就得出 $I_1<0$. 另一方面,通常税收不至于远远大于私人教育投入,故不妨设 $\varepsilon\geqslant\tau$ 或者 $|\varepsilon-\tau|$ 适当小,因而 $I_2>0$. 综合以上分析得出以下命题:

命题 2 在本段命题1的条件下,假定 τ 不过于超过 ε,$B\tau$ 不过于超过 g(或者说 τ 与 $\varepsilon,g/B$ 比较偏小或适中),则 ε 与 τ 相比,V 更敏感于 τ 的变化,ψ 更敏感于 ε 的变化.

这就表明,在以上命题适用的范围内,主要关心增长的决策者关注的重点是私人教育投资,而主要追求福利目标的决策者则更关注税收(加税).

D. 参数 g,δ 的作用

仍设 $\theta=\sigma_0^2=0$,但改令 $\alpha=0$,这意味着人力资本虽无福利效应,但对于生产则起完全的决定作用.此时有

$$B=A\varepsilon^{\delta}g^{\delta'},\quad \xi=1,\quad q=\sigma-Z,\quad \lambda=\tau',\quad \phi=B\delta'\tau'; \qquad \text{(用式(10))}$$

$$M=\rho-B\delta\sigma'\tau'+\varepsilon\sigma'=E, \qquad \text{(用式(13)、式(15))}$$

$$N=B-g-B\delta\tau', \qquad \text{(用式(14))}$$

$$F=D-B\delta'\sigma\tau', \qquad \text{(用式(15))}$$

---

① 以1990年美国的数据为例:当年公共开支占GDP的比率与平均税率分别为34.6%与31.2%,依本节的记号即 $g/B=34.6\%,\tau=31.2\%$,从而 $|B\tau-g|/g\approx 1\%$.

$$\psi = A\varepsilon^{\delta} g^{\delta'} - g - \varepsilon - \sigma^{-1}M - N. \qquad \text{(用式(17))}$$

(i) g 的作用. 依次求出

$$\frac{\partial B}{\partial g} = \frac{B\delta'}{g}, \quad \frac{\partial M}{\partial g} = -\frac{B\delta\delta'\sigma'\tau'}{g}, \quad \frac{\partial N}{\partial g} = \frac{B\delta'(1-\delta\tau')}{g} - 1,$$

$$\frac{\partial D}{\partial g} = \frac{B\delta'(\sigma - \delta\tau')}{g} - \sigma, \quad \frac{\partial F}{\partial g} = \frac{B\delta'(\sigma\tau - \delta\sigma'\tau')}{g} - \sigma;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial g} = \frac{\sigma}{D}\frac{\partial D}{\partial g} + \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial g} - \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial g}.$$

以上表达式仍然过于复杂,难以确定 g 的作用. 若 $\delta\delta' = 0$, 即 $\delta = 0$ 或1,则 $\frac{\partial M}{\partial g} = 0$, $\frac{\partial D}{\partial g}$, $\frac{\partial F}{\partial g}$ 与 g 无关,于是当 $\frac{\partial Q}{\partial g} = 0$ 时,有

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial g^2} = -\frac{\sigma}{D^2}\left(\frac{\partial D}{\partial g}\right)^2 + \left(\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial g}\right)^2 = -\frac{\sigma\sigma'}{D}\left(\frac{\partial D}{\partial g}\right)^2 > 0,$$

因而 $\partial Q/\partial g = 0$ 的解 $g = g^*$ 使 V 取最小. 若 $g^* > 0$, 则当 $0 < g < g^*$ 时 V 与 g 负相关. 另一方面

$$\frac{\partial \psi}{\partial g} = \frac{\partial B}{\partial g} - 1 - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial D}{\partial g} = \frac{B\delta\delta'\tau'}{g\sigma} = 0,$$

可见 ψ 与 g 无关. 这表明 g 的福利效应与增长效应是不同的. 当 $0 < \delta < 1$ 且 δ 接近于0,1 时有类似结论.

(ii) δ 的作用. 由 $\ln B = \ln A + \delta \ln\varepsilon + \delta' \ln g$ 得

$$\frac{\partial B}{\partial \delta} = B(\ln\varepsilon - \ln g) = B\ln\frac{\varepsilon}{g};$$

$$\frac{\partial M}{\partial \delta} = -\delta\sigma'\tau'\frac{\partial B}{\partial \delta} - B\sigma'\tau',$$

$$\frac{\partial N}{\partial \delta} = (1 - \delta\tau')\frac{\partial B}{\partial \delta} - B\tau',$$

$$\frac{\partial D}{\partial \delta} = (\sigma - \delta\tau')\frac{\partial B}{\partial \delta} - B\tau',$$

$$\frac{\partial F}{\partial \delta} = (\sigma\tau - \delta\sigma'\tau')\frac{\partial B}{\partial \delta} - B\sigma'\tau',$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \delta} = \frac{\sigma}{D}\frac{\partial D}{\partial \delta} + \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial \delta} - \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \delta}.$$

若 $\varepsilon = g$ (这意味个体与政府用同一比率投资教育),则 $\partial B/\partial\delta = 0$, 于是

$$-\frac{1}{B\tau'}\frac{\partial Q}{\partial \delta} = \frac{\sigma}{D} + \frac{\sigma'}{M} - \frac{\sigma'}{F} = \frac{\sigma}{D} - \frac{\sigma'}{MF}(M - F)$$

$$= \frac{\sigma}{D} - \frac{\sigma'}{MF}\sigma(g - B\tau).$$

如同上段所设定的, $g \geqslant B\tau$ 或者 $|g - B\tau|$ 适当小,则 $\partial Q/\partial\delta < 0$, 即 V 与 δ 负

相关，因而在 $\delta=1$ 时 V 达到最小. 而 $\delta=1$ 意味着 $h=\varepsilon k$ 完全由个体投资决定，从而外部性消失，此时个体决策与社会计划者决策一致. 另一方面，当 $\varepsilon=g$ 时 $\psi=Ag-2g-\sigma^{-1}D$，从而

$$\frac{\partial\psi}{\partial\delta}=-\frac{1}{\sigma}\frac{\partial D}{\partial\delta}=\frac{B\tau'}{\sigma}>0,$$

即 ψ 总与 δ 正相关. 这就得出以下结论：

命题 若教育仅有轻微的福利效用，生产与公共开支的波动适当小，人力资本对于生产的影响充分大，私人与政府的教育投资比率充分接近，则与个体决策相比，社会计划者决策导致较低的福利与较高的增长率.

4.3.2 加性生产函数情形

从传统的观点看来，函数(2)似乎是一合适的生产函数. 不过它有一明显的缺点：若个体置教育投资为零，则从式(1)得 $h=0$（除非 $\delta=0$），因而从函数(2)得 $y=0$（除非 $\alpha=1$），尽管未受教育的非熟练工人在许多不发达经济体中仍然是劳动大军中的重要部分. 如果采用生产函数(3)，这种矛盾就可以避免，但这导致一个颇不相同的模型.

A. 最优性条件

因与4.3.1小节中的模型相比，仅改变了生产函数，故凡不涉及生产函数的公式，都无须改变，这些都不必重写. 特别地，问题(4)、式(5)、资本增长方程(8)等都无须改变.

但最优性条件(6b)、最优性条件(6c)及与之相关的公式却有显著的改变，这是因为它们用到 y 的新的表达式：

$$y=A(\varepsilon' k+\theta_1\varepsilon^\delta k^\delta G^{\delta'})=A(\varepsilon' k+\theta_1 h).$$

这引出

$$\frac{\partial y}{\partial\nu}=Aw\left(\varepsilon'+\frac{\delta\theta_1 h}{k}\right),\quad \frac{\partial y}{\partial w}=A\nu\left(\varepsilon'+\frac{\delta\theta_1 h}{k}\right).$$

相应地，式(6b)、式(6c)与式(7)变为

$$\begin{cases}\left[\dfrac{\mu\delta\theta}{\nu}+A\tau'\left(\varepsilon'+\dfrac{\delta\theta_1 h}{k}\right)-\varepsilon-r\right]V_w+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial\nu}wV_{ww}=0, & \text{(19a)}\\[2ex] \left[\mu\delta\theta+A\nu\tau'\left(\varepsilon'+\dfrac{\delta\theta_1 h}{k}\right)-\varepsilon\nu+\nu' r-\rho\right]V_w+V_{tw} & \\[2ex] \quad+\left(\dfrac{\tau' y}{w}-\mu-\varepsilon\nu+\nu' r+\sigma_u^2+\dfrac{w}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial w}\right)wV_{ww}+\dfrac{\sigma_u^2}{2}w^2V_{www}=0; & \text{(19b)}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial\nu}=-\nu'\sigma_B^2-\dfrac{y}{w}\sigma_{BY}+A\left(\varepsilon'+\dfrac{\delta\theta_1 h}{k}\right)\left(\nu'\sigma_{BY}+\dfrac{y}{w}\sigma_Y^2\right), & \text{(20a)}\\[2ex] \dfrac{w}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial w}=-\dfrac{\nu' y}{w}\sigma_{BY}-\left(\dfrac{y}{w}\right)^2\sigma_Y^2+A\nu\left(\varepsilon'+\dfrac{\delta\theta_1 h}{k}\right)\left(\nu'\sigma_{BY}+\dfrac{y}{w}\sigma_Y^2\right). & \text{(20b)}\end{cases}$$

在宏观均衡时，$V = aU(w^{\bar{\beta}})$ 与式(11)均保持不变. 变化仍来自 y：在均衡时，$h = \varepsilon^{\delta} g^{\delta'} k$，因此

$$y = Y = A(\varepsilon' + \theta_1 \varepsilon^{\delta} g^{\delta'})k \triangleq Bk, \quad y/w = B\nu.$$

注意此处的 B 与上小节中的 B 并不相同. 不过式(9)及由其推出的 σ_B^2 等的公式形式上仍然不变，将其代入方程(20)得到

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \sigma_u^2}{\partial \nu} = -\dfrac{B^2 \sigma_G^2}{\nu'} - B(B - B_1)\sigma_Y^2, \\ \dfrac{w}{2} \dfrac{\partial \sigma_u^2}{\partial w} = -B(B - B_1)\nu\, \sigma_Y^2, \end{cases} \tag{20$'$}$$

其中

$$B_1 = A(\varepsilon' + \delta\theta_1 \varepsilon^{\delta} g^{\delta'}), \quad B - B_1 = A\delta'\theta_1 \varepsilon^{\delta} g^{\delta'}. \tag{21}$$

如同4.3.1小节中一样，作了上述准备之后，现在已可得出类似于式(12)～式(17)的公式：

$$\nu' r = \mu\delta\theta\nu'/\nu + \nu'(B_1\tau' - \varepsilon) + B^2 q\sigma_G^2 + B(B - B_1)\nu' q\sigma_Y^2;$$

$$\begin{cases} \mu(\xi q\nu + \delta\theta q') = \nu(M + q\phi\nu), \quad \phi = \lambda(B - B_1), \\ M = \rho - B_1\lambda q' + \varepsilon q' - \dfrac{1}{2} B^2 q q' \sigma_0^2; \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} \mu\xi\nu' = \nu(N - \phi\nu), \\ N = B - g - B_1\lambda - B^2 q\sigma_0^2. \end{cases} \tag{23}$$

联立方程(22)与方程(23)解出

$$\begin{cases} \nu = E/F, \quad E = \xi M - \delta\theta q' N, \\ F = \xi D - \phi Z, \quad D = M + qN, \quad Z = q + \delta\theta; \end{cases} \tag{24}$$

$$\mu = D\nu/Z = DE/FZ. \tag{25}$$

注意，形式上式(24)、式(25)与式(15)、式(16)并无区别. 但因 M,N 已有变化，故此处求得的 μ,ν 与4.3.1小节中的结果并不一致. 形式上，式(17)也无须改变：

$$\psi = B - g - \varepsilon - Z^{-1}(M + qN), \tag{26}$$

只是此处的 B,M,N 与式(17)相比已不相同.

B. 参数的作用

因均衡时 $V(\cdot)$ 的函数形式及式(11)均与4.3.1小节中一样，故式(18)依然可用. 今在式(18)的基础上讨论参数对福利的影响.

(i) τ 与 ε 的作用. 设 $\theta = \theta_1 = \sigma_0^2 = 0$，则

$$B = B_1 = A\varepsilon', \quad \xi = 1, \quad q = \sigma = Z, \quad \lambda = \tau', \quad \phi = 0.$$

进而得出，M,N,D,E,F 的表达式完全与4.3.1C中一样. 这就表明，类似于4.3.1C中的结论保持成立，具体描述如下.

命题 设以下条件满足：

(a) 教育的福利效应适当小(这意味 $\theta <$ 某个小正数)，

(b) 教育的生产效应适当小(这意味着 $\theta_1 <$ 某个小正数)，

(c) 公共教育开支与产出的波动不明显(这意味着 $\sigma_0^2 <$ 某个小正数)，

则存在最优税率 τ^* 与最优私人教育投资比率 ε^*；当 $0<\tau<\tau^*$ (或 $0<\varepsilon<\varepsilon^*$)时，提高税收(或提高私人教育投资比率)有益于福利但有碍于增长；过高的税收与私人教育投资对于福利与增长均无好处.

(ii) g 与 δ 的作用. 因 g 与 δ 出现于 h 中，而 h 在生产函数(2)与生产函数(3)中的作用并不一样，故对 g,δ 作用的分析有所不同.

首先考虑 g. 仍设 $\theta = \sigma_0^2 = 0, \delta\delta' = 0$. 分两种情况考虑. 若 $\delta = 0$，则

$$B = A(\varepsilon' + \theta_1 g),\quad \frac{\partial B}{\partial g} = A\theta_1;$$

$$B_1 = A\varepsilon',\quad \frac{\partial B_1}{\partial g} = 0;$$

$$M = \rho - B_1\sigma'\tau' + \varepsilon\sigma' = E,\quad \frac{\partial M}{\partial g} = 0;$$

$$N = B - g - B_1\tau',\quad \frac{\partial N}{\partial g} = A\theta_1 - 1;$$

$$\frac{\partial D}{\partial g} = \sigma(A\theta_1 - 1),\quad \frac{\partial E}{\partial g} = 0,\quad \frac{\partial F}{\partial g} = \sigma(A\theta_1\tau - 1);$$

$$\frac{\partial Q}{\partial g} = \frac{\sigma}{D}\frac{\partial D}{\partial g} - \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial g}.$$

当 $\partial Q/\partial g = 0$ 时，有

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial g^2} = \left(\frac{1}{F^2}\frac{\partial F}{\partial g}\right)^2 - \sigma\left(\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial g}\right)^2 = -\sigma\sigma'\left(\frac{1}{D^2}\frac{\partial D}{\partial g}\right) > 0.$$

$\dfrac{\partial Q}{\partial g} = 0$ 相当于 $\sigma F\dfrac{\partial D}{\partial g} = D\dfrac{\partial F}{\partial g}$，即

$$(M + \sigma N)[A\theta_1(\sigma - \tau) + \sigma'] = A\theta_1\sigma^2\tau'(A\theta_1 - 1)g,$$

由此解出 g 的最优值 g^*：

$$g^* = \frac{[A\theta_1(\sigma - \tau) + \sigma'](\rho + \varepsilon\sigma' + A\varepsilon'\sigma\tau - A\varepsilon'\sigma'\tau')}{\sigma\sigma'(1 - A\theta_1)(1 - A\theta_1\tau)}.$$

若 $g^* > 0$，则当 $0 < g < g^*$ 时 V 与 g 负相关.

若 $\delta = 1$，则 $B = B_1 = A(\varepsilon' + \theta_1\varepsilon), D = F$，

$$\frac{\partial B}{\partial g} = \frac{\partial M}{\partial g} = \frac{\partial E}{\partial g} = 0,\quad \frac{\partial D}{\partial g} = -\sigma.$$

于是

$$\frac{\partial Q}{\partial g} = -\frac{\sigma'}{D}\frac{\partial D}{\partial g} = \frac{\sigma\sigma'}{D} < 0.$$

综合以上两种情况可得出以下结论：在教育的福利效应不很大、产出与公共开支波动不明显、δ 充分接近于0或1的情况下，公共开支比率 g 从较小的数值开始升高将不利于福利. 另一方面，g 的变动对于增长则无明显影响.

其次考虑 δ 的作用. 类似于4.3.1D中的做法，设 $\theta=\sigma_0^2=0,\varepsilon=g$，则

$$B=A(\varepsilon'+\theta_1\varepsilon),\quad B_1=A(\varepsilon'+\delta\theta_1\varepsilon);$$

$$\frac{\partial B}{\partial\delta}=0,\quad \frac{\partial B_1}{\partial\delta}=A\varepsilon\theta_1;$$

$$\frac{\partial M}{\partial\delta}=-\sigma'\tau'\frac{\partial B_1}{\partial\delta},\quad \frac{\partial N}{\partial\delta}=-\tau'\frac{\partial B_1}{\partial\delta}=\frac{\partial D}{\partial\delta};$$

$$E=M,\quad F=D-A\delta'\varepsilon\theta_1\sigma\tau',\quad \frac{\partial F}{\partial\delta}=-A\varepsilon\theta_1\sigma'\tau';$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial\delta}&=\frac{\sigma}{D}\frac{\partial D}{\partial\delta}+\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial\delta}-\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial\delta}\\&=-A\varepsilon\theta_1\tau'\left[\frac{\sigma}{D}-\frac{\sigma'}{FM}(M-F)\right]\\&=-A\varepsilon\theta_1\tau'\left[\frac{\sigma}{D}-\frac{\sigma\sigma'}{FM}(\varepsilon-B\tau)\right].\end{aligned}$$

如同4.3.1D中已指出的，通常 $\varepsilon=g\approx B\tau$，因此 $\partial Q/\partial\delta<0$. 这就达到与4.3.1D类似的结论.

命题　设教育的福利效应及产出、公共开支的扰动都适当小，私人与公共教育投资比率充分接近，则与个体决策相比，社会计划者决策导致较低的福利与较高的增长率.

C. 内生确定 ε

前面将 ε 看作外生的，这意味着个体决定教育投资比率时并无选择余地. ε 也许取决于传统与习俗，这并非毫无道理. 但对于一个理性的个体来说，这毕竟是一个不合情理的约束. 更自然的选择必然联系于效用最大化，因而 ε 更可能作为决策问题的控制变量. 现在就来考虑一下，在 ε 作为控制变量的情况下，问题的均衡值将有哪些变化.

首先，最优性条件(19)需作修改. 求出 $\partial h/\partial\varepsilon=\delta h/\varepsilon$，

$$\frac{\partial y}{\partial\varepsilon}=\frac{Ak}{\varepsilon}\left(\varepsilon'+\frac{\delta\theta_1 h}{k}-1\right).$$

条件(19)再增加如下条件：

$$\left[\mu\delta\theta+A\nu\tau'\left(\varepsilon'+\frac{\delta\theta_1 h}{k}-1\right)-\varepsilon\nu\right]V_w+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\sigma_u^2}{\partial\varepsilon}wV_{ww}=0,\tag{19c}$$

其中

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\sigma_u^2}{\partial\varepsilon}=A\nu\left(\varepsilon'+\frac{\delta\theta_1 h}{k}-1\right)\left(\nu'\sigma_{BY}+\frac{y}{w}\sigma_Y^2\right).\tag{20c}$$

在均衡时式(20c)简化为

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial \sigma_u^2}{\partial \varepsilon} = -B(A-B_1)\nu\,\sigma_Y^2. \tag{20c)'}$$

以此代入式(19c),并令 $K=k$,得

$$\mu\delta\theta + \lambda\nu(B_1 - A) - \varepsilon\nu = 0.$$

此式与 $\mu/\nu = D/Z$(依式(25))联立得

$$\delta\theta(M+qN) = Z[(A-B_1)\lambda + \varepsilon],$$

即

$$\delta\theta\left(\rho + Bq - gq - B_1\lambda + \varepsilon q' - \frac{B^2 q\bar{q}\sigma_0^2}{2}\right) = (q+\delta\theta)(A\lambda - B_1\lambda + \varepsilon). \tag{27}$$

注意其中 B 与 B_1 均包含 ε. 方程(27)就是所需要的决定均衡值 ε 的方程,因它是非线性的,并不能求得 ε 的明显表达式.

若取 $\theta=\sigma_0^2=0$,则方程(27)简化为

$$\tau'(A-B_1)+\varepsilon=0,$$

由此解出

$$\varepsilon = g\left(\frac{A\delta\theta_1\tau'}{A\tau'+1}\right)^{1/\delta'} \tag{28}$$

式(28)表明 ε 与 A,g,θ_1 正相关,与 τ 负相关. 这表明以下每种情况都促使个体将其资本的更大份额投入教育:生产力提高;公共教育投资比率增加;教育对于生产的贡献增大;税率下降. $\varepsilon=g$ 的充要条件是

$$A\delta\theta_1\tau' = A\tau'+1,$$

即

$$A\tau' = 1/(\delta\theta_1 - 1).$$

4.3.3 R&D 与消费优化

今将 4.1.3 小节中考虑的 R&D 模型改造成一个消费优化决策模型,从而可对其进行福利分析,并由此导致一定政策结论.

A. 模型与最优性条件

依 4.1.3 小节中的记号,分别以 ψ_A 与 Y 表示技术的期望增长率与总产出. 不考虑人口增长,因而不妨设 $L=1$. 相应地,将 4.1 节中式(21)与式(22)修改为

$$\psi_A = C_A(K/A)^{\xi},\quad Y = C_Y K^{\alpha} A^{\alpha'}, \tag{29}$$

其中 $C_A, C_Y, \xi > 0$ 与 $\alpha\in(0,1)$ 是外生常数. 如 4.1 节中所提到的,C_A 与 C_Y 反映了经济资源在 R&D 部门与生产部门的投入,因而可看作政策参数. 此处没有采用更具一般性的 $\psi_A = C_A K^{\xi} A^{\theta}$(参看 4.1 节式(22)),是因为我们希望在均衡时 $K/A, Y/K$ 与 ψ_A 均为常数,而这就要求采用如式(29)所表达的 ψ_A 与 Y. A 与 K 的增长方程在 4.1 节式(23)的基础上得出,关键的修改是,因储蓄取决于消费

优化决策，故以 $(Y-C)$ 取代 sY，从而

$$\mathrm{d}K=(Y-C)\mathrm{d}t+K\mathrm{d}u_K.$$

以上方程正好与4.2节中的方程(16b)相当. 社会总消费 C 取决于社会计划者决策. 社会计划者在选择 C 时，不仅考虑公众从消费 C 中获得的效用，而且也考虑技术进步的福利效应. 发达的技术不仅有助于提供更多优质消费品，而且为人们带来更多的闲暇、更惬意的业余生活、梦幻般的娱乐，以至整个地改变人们的生活方式. 由此看来，直接将技术置入效用函数是合理的.

综合以上考虑，现在可将社会计划者的最优决策问题表为

$$\begin{cases}\max\limits_{C}\mathrm{E}_0\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\rho t}U(C(t)A^{\theta}(t))\mathrm{d}t, & (30\mathrm{a})\\ \text{s.t. } \mathrm{d}A=A(\psi_A\mathrm{d}t+\mathrm{d}u_A), & (30\mathrm{b})\\ \qquad \mathrm{d}K=(Y-C)\mathrm{d}t+K\mathrm{d}u_K, & (30\mathrm{c})\end{cases}$$

其中 $\theta\geqslant 0$ 是外生参数，它表达了技术 A 对于消费者效用的重要性；ψ_A 与 Y 依式(29)，$A(0)=A_0$ 与 $K(0)=K_0$ 是给定的；$\mathrm{d}u_A$ 与 $\mathrm{d}u_K$ 是Brown 运动，它们受到下面将给出的均衡条件的约束(见式(34)). 问题(30)没有考虑政府的财政政策，这可以使模型简单些. 不过，R&D 问题必然联系于政府预算，在一个更精细的模型中应考虑到这种关联性.

问题(30)是含两个状态变量 A,K 的自治的随机最优化问题，其最优性条件可依3.3节式(5)标准地写出. 以 $V=V(A,K)$ 记问题(30)的值函数，则(参考3.1节式(46))

$$LV=\psi_A AV_A+(Y-C)V_K+\frac{1}{2}(\sigma_A^2A^2V_{AA}+2\sigma_{AK}AKV_{AK}+\sigma_K^2K^2V_{KK}).$$

于是，问题(30)的最优性条件为

$$\begin{cases}\rho V=U+\psi_A AV_A+(Y-C)V_K\\ \qquad +\frac{1}{2}(\sigma_A^2A^2V_{AA}+2\sigma_{AK}AKV_{AK}+\sigma_K^2K^2V_{KK}), & (31\mathrm{a})\\ 0=U'(CA^{\theta})A^{\theta}-V_K, & (31\mathrm{b})\\ \rho V_A=U'(CA^{\theta})C\theta A^{\theta-1}+\xi'\psi_A V_A+\psi_A AV_{AA}+\alpha'(Y/A)V_K+(Y-C)V_{AK}\\ \qquad +\frac{1}{2}(2\sigma_A^2AV_{AA}+\sigma_A^2A^2V_{AAA}+2\sigma_{AK}KV_{AK}\\ \qquad +2\sigma_{AK}AKV_{AAK}+\sigma_K^2K^2V_{AKK}), & (31\mathrm{c})\\ \rho V_K=\xi(\psi_A/K)AV_A+\psi_A AV_{AK}+\alpha(Y/K)V_K+(Y-C)V_{KK}\\ \qquad +\frac{1}{2}(\sigma_A^2A^2V_{AAK}+2\sigma_{AK}AV_{AK}+2\sigma_{AK}AKV_{AKK}\\ \qquad +2\sigma_K^2KV_{KK}+\sigma_K^2K^2V_{KKK}). & (31\mathrm{d})\end{cases}$$

利用式(31b),可将式(31c)右端第一项改写成 $C\theta V_K/A$.

B. 均衡

依照已熟知的思路,设在均衡时

$$\begin{cases} \mu \triangleq C/K \equiv \text{const}, \quad \nu \triangleq A/K \equiv \text{const}; & (32\text{a}) \\ \dfrac{\mathrm{d}A}{A} = \dfrac{\mathrm{d}K}{K}. & (32\text{b}) \end{cases}$$

以 $A = \nu K$ 代入式(29)得

$$\psi_A = C_A \nu^{-\xi} \triangleq \psi, \quad Y/K = C_Y \nu^{\alpha'} \triangleq B. \tag{33}$$

结合式(32b)与式(30b)、式(30c)、式(32a)、式(33),得到

$$\psi \mathrm{d}t + \mathrm{d}u_A = (B - \mu)\mathrm{d}t + \mathrm{d}u_K.$$

可见在均衡时有

$$\begin{cases} \psi = B - \mu (\Leftrightarrow \mu = B - \psi), & (34\text{a}) \\ \mathrm{d}u_A = \mathrm{d}u_K, \quad \sigma_A^2 = \sigma_{AK} = \sigma_K^2. & (34\text{b}) \end{cases}$$

参照4.2.2D,设 $V = aA^p K^q$,其中参数 $a < 0$ (注意 $U(\cdot) < 0$!)与 p,q 待定.依次求出

$$\begin{cases} AV_A = pV, \quad KV_K = qV; \\ A^2 V_{AA} = -pp'V, \quad AKV_{AK} = pqV, \quad K^2 V_{KK} = -qq'V; \\ A^3 V_{AAA} = pp'(2-p)V, \quad K^3 V_{KKK} = qq'(2-q)V; \\ A^2 K V_{AAK} = -pp'qV, \quad AK^2 V_{AKK} = -pqq'V. \end{cases}$$

将以上各式及式(32)~式(34)代入式(31),经化简后得

$$\begin{cases} R = \dfrac{1}{a\sigma'} \mu^{\sigma'} \nu^{\beta\sigma' - p} K^{\bar{\theta}\sigma' - s} + \psi s, & (31\text{a})' \\ aq = \mu^{-\sigma} \nu^{\beta\sigma' - p} K^{\bar{\theta}\sigma' - s}, & (31\text{b})' \\ R = \dfrac{q}{p}(\alpha' B + \theta\mu) + \psi(s - \xi), & (31\text{c})' \\ R = \alpha B + \psi\left(\dfrac{\xi p}{q} - s'\right), & (31\text{d})' \end{cases}$$

其中

$$s = p + q, \quad R = \rho + \frac{ss'\sigma_K^2}{2}. \tag{35}$$

由式(31b)′得出 $s = \bar{\theta}\sigma' < 0, aq > 0$, 从而 $q < 0$. 于是可将式(31a)′与式(31b)′简化为

$$\begin{cases} R = \dfrac{\mu q}{\sigma'} + \psi s, & (36\text{a}) \\ aq = \mu^{-\sigma} \nu^{\beta\sigma' - p}. & (36\text{b}) \end{cases}$$

经过仔细分析发现,形式类似的方程(31c)′、方程(31d)′与方程(36a)并非相互

独立，因此只需保留方程(36a)及由式(31c)′、式(31d)′相减而得之方程

$$B\left(\alpha-\frac{\alpha' q}{p}-\frac{\theta q}{p}\right)+\psi\left(\frac{\xi p}{q}+\frac{\theta q}{p}-\xi'\right)=0. \tag{36c}$$

利用方程(36a)～方程(36c)及 $\mu=B-\psi$（依式(34a)），已可完全确定均衡值 μ, ν 及参数 a,q（注意 $p=\bar{\theta}\sigma'-q$）.

不过，从所得方程组解出 μ,ν,a,q 并不容易. 下面所用方法的特点是：将 μ, a,q 均表为 ν 的函数，而 ν 则由某个方程确定. 将 B,ψ 视为已知，并用 $p=s-q$，将式(36c)化为关于 q 的二次方程：

$$\mu q^2-q\sigma'(\alpha B-\xi\psi)-\bar{\theta}\xi\psi\sigma'^2=0.$$

由此解出（注意 $q<0,\sigma'<0$）

$$q=\frac{\sigma'}{2\mu}\left[\alpha B-\xi\psi+\sqrt{(\alpha B-\xi\psi)^2+4\bar{\theta}\mu\xi\psi}\right]\triangleq q(\nu). \tag{37}$$

结合式(33)与式(37)不难看出，当 $\nu\in(0,\infty)$ 时 $q(\nu)$ 是有界的. 以 $q=q(\nu)$ 代入式(36a)得到关于 ν 的方程

$$R=\frac{\mu q}{\sigma'}+\psi s\triangleq\varphi(\nu), \tag{38}$$

其中 R 依式(35)，$\psi=\psi(\nu)$ 依式(33)，$\mu=B(\nu)-\psi(\nu)\triangleq\mu(\nu)$. 由 $B(0)=0=\psi(\infty)$ 与 $B(\infty)=\infty=\psi(0)$ 得出 $\varphi(0)=-\infty,\varphi(\infty)=\infty$. 因此，方程(38)必有解 $\nu>0$. 确定一个这样的 $\nu>0$，并将其代入式(37)及 $\mu=B-\psi$，式(36b)，即得到所要的 q,p,μ,a.

以 $Y-C=\psi K$（用式(32)减去式(34)）代入方程(30c)得

$$\mathrm{d}K=K(\psi\mathrm{d}t+\mathrm{d}u_K),\quad K(0)=K_0.$$

由此积出（用 3.2 节式(20)′）

$$K(t)=K_0\exp\left[\left(\psi-\frac{\sigma_K^2}{2}\right)t+u_K(t)\right].$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}U(C(t)A^\theta(t))\mathrm{d}t\\
=&\mathrm{E}_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}U(\mu\nu^\beta K^{\bar{\theta}}(t))\mathrm{d}t && \text{(用式(32a))}\\
=&U(\mu\nu^\beta K_0^{\bar{\theta}})\int_0^\infty \mathrm{E}_0\exp\left[-\rho t+\bar{\theta}\sigma'\left(\psi-\frac{\sigma_K^2}{2}\right)t+\bar{\theta}\sigma' u_K(t)\right]\mathrm{d}t\\
=&U(\mu\nu^\beta K_0^{\bar{\theta}})\int_0^\infty \exp\left[-\left(\rho-\psi s+\frac{ss'\sigma_K^2}{2}\right)t\right]\mathrm{d}t && \text{(用 3.1 节式(31)′)}\\
=&U(\mu\nu^\beta K_0^{\bar{\theta}})\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\mu q t}{\sigma'}\right)\mathrm{d}t && \text{(用式(36a))}\\
=&U(\mu\nu^\beta K_0^{\bar{\theta}})\frac{\sigma'}{\mu q}=\frac{\nu^{\beta\sigma'}K_0^s}{q\mu^{\sigma}} && \left(\text{用}\frac{\sigma'}{\mu q}>0\right)
\end{aligned}
$$

$$=a\nu^{p}K_0^{s} = aA_0^{p}K_0^{q}, \qquad \text{(用式(36b))}$$

这就验证了 $V(A_0,K_0) = aA_0^pK_0^q$. 注意,上述演算中用到关键事实 $\mu > 0$(已知 $q < 0$),即

$$B - \psi = C_Y\nu^{\alpha'} - C_A\nu^{-\xi} > 0,$$

或

$$\nu > (C_A/C_Y)^{1/(\alpha'+\xi)}, \tag{39}$$

其中 ν 由方程(38)决定. 式(39)给出对模型参数的一定限制,下面假定这一条件已被满足.

读者可注意到方程(38)并不提供 ν 的显式解. 这一点或许还不是主要问题,真正成问题的是 q 依赖于 ν 且表达式(37)颇不简单,这给下面的分析造成很大困难. 例如,若要从方程(38)求 ν 对某个模型参数的导数(下面就要作这种计算),则势必要能求出 $q'(\nu)$, 而用式(37)却很难做到这一点. 有趣的是,有一特殊情况可以避免这一困难,这就是如下条件满足的情况:

$$\xi = \frac{\alpha\alpha'}{\theta + \alpha'}. \tag{40}$$

在条件(40)之下,不难验证,可取

$$p = (\theta + \alpha')\sigma', \quad q = \alpha\sigma', \tag{41}$$

此时方程(31a)′、方程(31d)′与方程(36a)都简化为同一个方程

$$R = \alpha B + \psi(s - \alpha) = \alpha C_Y\nu^{\alpha'} + C_A\nu^{-\xi}(s - \alpha) \triangleq \varphi(\nu). \tag{42}$$

由式(42)可直接看出 $\varphi(0) = -\infty, \varphi(\infty) = \infty$,

$$\varphi'(\nu) = \alpha\alpha' C_Y\nu^{-\alpha} + \xi(\alpha - s)C_A\nu^{-\xi-1} > 0,$$

因此由方程(42)可唯一地解出 $\nu = \varphi^{-1}(R) > 0$. 若进而取 $\theta = 0$(这意味着不考虑技术的福利效应),则

$$\xi = \alpha, \quad p = \alpha'\sigma', \quad q = \alpha\sigma', \quad s = \sigma'; \tag{43}$$

而不等式(39)则简化为 $\nu > C_A/C_Y$, 即

$$R > \varphi(C_A/C_Y) = \sigma' C_A^{\alpha'} C_Y^{\alpha}. \tag{44}$$

只要 σ_K^2 不太大,条件(44)必可满足.

C. 福利分析

取定 $K_0 > 0$, 令 $A_0 = \nu K_0$, 则

$$V = V(A_0,K_0) = aA_0^pK_0^q = a\nu^pK_0^s = \frac{\nu^{\beta\sigma'}K_0^s}{q\mu^\sigma}. \qquad \text{(用式(36b))}$$

若以式(37)所表出的 q 代入上式,则很难对 V 进行分析. 因此下面考虑由式(40)限定的特殊情况,这一情况固然受到局限,但其结论颇能说明问题. 因 $q = \alpha\sigma'$(依式(41)),故有

$$-\ln(\alpha\sigma' V) = \sigma\ln\mu - \theta\sigma'\ln\nu - s\ln K_0 \triangleq Q. \tag{45}$$

设 λ 是异于 θ,σ 的外生参数，则

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda}=\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial \lambda}-\frac{\theta\sigma'}{\nu}\frac{\partial \nu}{\partial \lambda}. \tag{46}$$

使人感兴趣的参数是 C_A,C_Y 与 σ_K^2，三者分别表示对研发、生产投入的力度与资本积累的风险. 为用式(46)计算 $\partial Q/\partial\lambda,\lambda=C_A,C_Y,\sigma_K^2$，需算出 $\partial\nu/\partial\lambda$，为此利用方程(42)(若用式(38)则困难得多!)：

$$\frac{\partial \nu}{\partial C_A}=\frac{\nu^{\xi}(\alpha-s)}{F}>0,$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial C_Y}=-\frac{\alpha\nu^{1+\alpha'}}{F}<0,$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \sigma_K^2}=\frac{ss'\nu}{2F}<0,$$

其中 $F=\alpha\alpha' B+\psi\xi(\alpha-s)>0$.. 然后利用 $\mu=C_Y\nu^{\alpha'}-C_A\nu^{-\xi}$ 与式(46)得

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial C_A}&=\frac{\sigma}{\mu}\left[\left(\frac{\alpha' B}{\nu}+\frac{\xi\psi}{\nu}\right)\frac{\partial \nu}{\partial C_A}-\nu^{-\xi}\right]-\frac{\theta\sigma'}{\nu}\frac{\partial \nu}{\partial C_A}\\&=\frac{\alpha' B\sigma+\xi\psi\sigma-\theta\mu\sigma'}{\mu\nu}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial C_A}-\frac{\sigma}{\mu\nu^{\xi}}\\&=\frac{\sigma'[B(\theta s-\alpha\theta-\alpha'\bar{\theta}\sigma)+\theta\psi(\alpha-s)]}{F\mu\nu^{\xi}}.\end{aligned} \tag{47}$$

类似地，可算出

$$\frac{\partial Q}{\partial C_Y}=\frac{\nu^{\alpha'}[\alpha B\theta\sigma'-\psi\sigma'(\alpha\theta+\bar{\theta}\xi\sigma)]}{F\mu}; \tag{48}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_K^2}=\frac{ss'[B(\alpha'\sigma-\theta\sigma')+\psi(\xi\sigma+\theta\sigma')]}{2F\mu}. \tag{49}$$

注意到 $\sigma'<0,\theta s-\alpha\theta-\alpha'\bar{\theta}\sigma<0,B>\psi$ (用式(39))，有

$$\frac{\partial Q}{\partial C_A}>\frac{-\alpha' B\bar{\theta}\sigma\sigma'}{F\mu\nu^{\xi}}>0.$$

类似地，可从式(49)推出 $\partial Q/\partial\sigma_K^2<0$. 这表明 Q 与 C_A 正相关，而与 σ_K^2 负相关. 另一方面，有

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma_K^2}=-\frac{\xi\psi}{\nu}\frac{\partial \nu}{\partial \sigma_K^2}=-\frac{\xi\psi ss'}{2F}>0,$$

可见市场风险的福利效应与增长效应恰好相反，这是已多次证实的结论.

式(48)似乎并不直接显示 $\partial Q/\partial C_Y>0$，但这无疑是可期待的结论. Q 无论与 C_A 还是与 C_Y 正相关，都是意料中的事，并无深意. 较有趣的问题是 Q 对 C_A，C_Y 中哪一个更敏感?这依赖于弹性计算(参看4.3.1C). 为简单起见，取 $\theta=0$，此时式(47)、(48)都变得很简单，因而容易算出

$$C_A \frac{\partial Q}{\partial C_A} - C_Y \frac{\partial Q}{\partial C_Y} = \frac{\xi \sigma \sigma' \nu^{\alpha' + \xi} \psi C_Y - \alpha' \sigma \sigma' B C_A}{F \mu \nu^{\xi}}$$

$$= \frac{-\sigma \sigma' C_A C_Y \nu^{\alpha' - \alpha}(1 - 2\alpha)}{F \mu}. \quad (\text{用式(43)})$$

上式右端在 $0 < \alpha < 1/2$ 时为正，而在 $1/2 < \alpha < 1$ 时为负. 这就得出结论：若 $\alpha < \alpha'$（这意味着技术对于产出的贡献大于资本对于产出的贡献），则加大对R&D部门的投入，对于增进福利的效果更为显著；若 $\alpha > \alpha'$，则结论恰好相反. 若 $\theta > 0$，则仍可得出类似结论：当 α 适当小时（未必正好是 $\alpha < 1/2$），福利增进更敏感地依赖于对R&D部门的投入；当 α' 适当小时结论相反.

4.3.4 两部门资源最优配置

一个自然而有意义的问题是：应如何在物质产品生产部门与人力资本生产部门（不妨认为后者为教育部门）配置资源，以实现社会福利的最大化？此问题可用类似于4.3.3小节中的方法来进行研究，只是涉及更复杂的计算.

A. 模型与最优性条件

依4.1.2小节中的记号，分别以 H 与 K 表示人力资本与物质资本的社会总存量. 其次，设人力资本与物质资本的期望变化率分别为 I 与 $(Y - C)$，其中

$$I = C_I (u'K)^{\beta} (vH)^{\beta'}, \quad Y = C_Y (uK)^{\alpha} (vH)^{\alpha'}, \tag{50}$$

$u, v \in (0,1)$ 分别为物质资本与人力资本投向生产部门的份额，它们将由一个最优决策决定；$C_I, C_Y > 0$ 与 $\alpha, \beta \in (0,1)$ 是外生参数. 式(50)表明，人力资本如同物资产品一样，均以常数规模回报的形式"产出"，这基本上是合理的. 物质资本的增长仍然依据方程(30c)；而人力资本的增长则依据类似的方程

$$\mathrm{d}H = I \mathrm{d}t + H \mathrm{d}u_H.$$

社会计划者应最优地选择社会总消费 C 与资本配置比率 u, v，以使社会福利最大化，这意味着解如下随机最优决策问题：

$$\begin{cases} \max\limits_{C, u, v} \mathrm{E}_0 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho t} U(c(t)) \mathrm{d}t, & \text{(51a)} \\ \text{s.t. } \mathrm{d}H = I \mathrm{d}t + H \mathrm{d}u_H, & \text{(51b)} \\ \qquad \mathrm{d}K = (Y - C) \mathrm{d}t + K \mathrm{d}u_K, & \text{(51c)} \end{cases}$$

其中 I, Y 依式(50)，$H(0) = H_0$ 与 $K(0) = K_0$ 是给定的；$\mathrm{d}u_H$ 与 $\mathrm{d}u_K$ 是Brown运动，它们将受一定均衡条件约束.

除了新增控制变量 u, v 之外，问题(51)与问题(30)是高度类似的，因而其分析方法亦很接近.

以 $V = V(H, K)$ 记问题(51)的值函数，则可标准地写出类似于式(31)的最优性条件：

$$
\begin{cases}
\rho V = U + IV_H + (Y-C)V_K + \dfrac{1}{2}(\sigma_H^2 H^2 V_{HH} + 2\sigma_{HK} HKV_{HK} + \sigma_K^2 K^2 V_{KK}), & (52a)\\
0 = U' - V_K, & (52b)\\
0 = -\dfrac{\beta I}{u'} V_H + \dfrac{\alpha Y}{u} V_K, & (52c)\\
0 = -\dfrac{\beta' I}{v'} + \dfrac{\alpha' Y}{v} V_K, & (52d)\\
\rho V_H = \dfrac{\beta' I}{H} V_H + IV_{HH} + \dfrac{\alpha' Y}{H} V_K + (Y-C)V_{HK} & \\
\quad + \dfrac{1}{2}(2\sigma_H^2 HV_{HH} + \sigma_H^2 H^2 V_{HHH} + 2\sigma_{HK} KV_{HK} + 2\sigma_{HK} HKV_{HHK} + \sigma_K^2 K^2 V_{HKK}), & (52e)\\
\rho V_K = \dfrac{\beta I}{K} V_H + IV_{HK} + \dfrac{\alpha Y}{K} V_K + (Y-C)V_{KK} & \\
\quad + \dfrac{1}{2}(\sigma_H^2 H^2 V_{HHK} + 2\sigma_{HK} HV_{HK} + 2\sigma_{HK} HKV_{HKK} + 2\sigma_H^2 KV_{KK} + \sigma_K^2 K^2 V_{KKK}). & (52f)
\end{cases}
$$

结合式(52c)与式(52d)得

$$
\frac{u'v}{uv'} = \frac{\alpha'\beta}{\alpha\beta'} \triangleq b; \tag{53}
$$

由此解出

$$
v = \frac{bu}{1-b'u}, \quad v' = \frac{u'}{1-b'u}. \tag{54}
$$

可见 v 由 u 唯一决定.

B. 均衡

类似于式(32),对于问题(51)提出如下均衡条件:

$$
\begin{cases}
\mu \triangleq \dfrac{C}{K} \equiv \text{const}, \quad h \triangleq \dfrac{H}{K} \equiv \text{const}, \quad u \equiv \text{const}; & (55a)\\
\dfrac{\mathrm{d}H}{H} = \dfrac{\mathrm{d}K}{K}. & (55b)
\end{cases}
$$

以式(55a)代入式(50)得

$$
\frac{I}{H} = C_I\left(\frac{u'}{h}\right)^{\beta} v'^{\beta'} \triangleq \psi, \quad \frac{Y}{K} = C_Y u^{\alpha}(hv)^{\alpha'} \triangleq B. \tag{56}
$$

因此 $Y - C = (B-\mu)K$, 于是结合式(55b)与式(51b)、(51c)有

$$
\psi \mathrm{d}t + \mathrm{d}u_H = (B-\mu)\mathrm{d}t + \mathrm{d}u_K;
$$

由此得出

$$
\begin{cases}
\psi = B - \mu (\Leftrightarrow \mu = B - \psi), & (57a)\\
\mathrm{d}u_H = \mathrm{d}u_K, \quad \sigma_H^2 = \sigma_{HK} = \sigma_K^2. & (57b)
\end{cases}
$$

类似于问题(30),设 $V = aH^pK^q$, 其中参数 $a<0$ 与 p,q 待定. 类似于4.3.3小节,形如 $HV_H = pV, KV_K = qV$ 一类的式子是明显的,不必一一写出. 将这类

公式及式(55)～式(57)代入最优性条件(52)，得到

$$\begin{cases} R = \dfrac{\mu^{\sigma'} K^{\sigma'-s}}{a\sigma' h^{p}} + \psi s, \qquad (R,s\text{ 依式}(35)) & (52a)' \\ aq = h^{-p}\mu^{-\sigma}K^{\sigma'-s}, & (52b)' \\ \alpha' Bqu' = \beta\psi pu, & (52c)' \\ \alpha' Bqv' = \beta'\psi pv, & (52d)' \\ R = \dfrac{\alpha' Bq}{p} + \psi(s-\beta), & (52e)' \\ R = \alpha B + \psi\left(\dfrac{\beta p}{q} - s'\right). & (52f)' \end{cases}$$

由式(52a)′得 $s=\sigma'$；用式(53)可验知式(52c)′⇔式(52d)′；类似于对条件(31)′的分析，形式上相近的条件(52a)′、条件(52e)′与条件(52f)′并非互相独立，因此可以式(52e)′与式(52f)′相减所得之方程取代式(52e)′与式(52f)′. 经过这些处理之后，条件(52)′简化为

$$\begin{cases} R = \dfrac{\mu q}{\sigma'} + \psi\,\sigma', & (58a) \\ aq = h^{-p}\mu^{-\sigma}, & (58b) \\ \alpha Bqu' = \beta\psi pu, & (58c) \\ Bq(q-\alpha\sigma') + \psi p(q-\beta\sigma'). & (58d) \end{cases}$$

式(58)与式(54)、式(57a)一起共有 6 个方程，它们正好用来确定均衡值 h,μ,u,v 与参数 a,q（注意 $p=\sigma'-q$）. 具体做法颇类似于4.3.3B 中的方法：求出用 u 表出其余各均衡值的公式，然后导出确定 u 的方程. 首先，由式(58d)得出关于 q 的二次方程

$$\mu q^2 - q\sigma'(\alpha B - \beta\psi) - \beta\psi\sigma'^2 = 0. \tag{59}$$

另一方面，从方程(58c)解出

$$q = \frac{\beta\psi\sigma' u}{\alpha Bu' + \beta\psi u}. \tag{60}$$

联立式(59)与式(60)消去 q，得到方程

$$\alpha^2 Bu' = \psi u(\alpha\beta' - \gamma u), \quad \gamma = \alpha - \beta. \tag{61}$$

然后依式(56)消去上式中的 B 与 ψ 得

$$h^{\alpha'+\beta} = \frac{C_I(\alpha\beta' - \gamma u)}{\alpha^2 C_Y}\left(\frac{u}{v}\right)^{\alpha'}\left(\frac{v'}{u'}\right)^{\beta};$$

再用式(54)消去 v,v' 得

$$h = \left[\frac{C_I(\alpha\beta' - \gamma u)}{\alpha^2 b^{\alpha'} C_Y(1-b'u)^{\gamma}}\right]^{1/(\alpha'+\beta)} \triangleq h(u). \tag{62}$$

将式(54)与式(62)代入式(56)得出 $B=B(u),\psi=\psi(u)$，进而得 $\mu=B-\psi=\mu(u)$ 与 $q=q(u)$（用式(60)）及 $a=a(u)$（用式(58b)），这就只余下确定 u 了.

为确定 u，利用方程(58a)：

$$R\sigma' = \mu(u)q(u) + \psi(u)\sigma'^2 \triangleq \varphi(u). \tag{63}$$

利用式(54)、式(56)与式(60)，不难求得函数 $\varphi(\cdot)$ 的表达式，但因其过繁而不便写出. 实际上，只需依次求出

$$u = 0 \Rightarrow v = 0, \quad u = 1 \Rightarrow v = 1; \qquad (\text{用式}(54))$$

$$h(0) > 0, \quad h(1) > 0; \qquad (\text{用式}(62))$$

$$B(0) = 0 = \psi(1), \quad B(1) > 0, \psi(0) > 0; \qquad (\text{用式}(56))$$

$$\mu(0) = -\psi(0) < 0, \quad \mu(1) = B(1) > 0;$$

$$\begin{aligned} q(u) &= \frac{\beta\sigma' u}{\alpha u'(B/\psi) + \beta u} && (\text{用式}(60)) \\ &= \frac{\beta C_I \sigma'}{\alpha C_Y h^{\alpha'+\beta}(v/u)^{\alpha'}(u'/v')^{\beta'} + \beta C_I} && (\text{用式}(56)) \\ &= \frac{\beta C_I \sigma'}{\alpha C_Y h^{\alpha'+\beta} b^{\alpha'}(1 - b'u)^{\gamma} + \beta C_I}, && (\text{用式}(54)) \end{aligned} \tag{64}$$

$$q(0) < 0, \quad q(1) < 0;$$

$$\varphi(0) = \mu(0)q(0) + \psi(0)\sigma'^2 > 0,$$

$$\varphi(1) = \mu(1)q(1) < 0.$$

因此，只要 ρ 与 σ_K^2 适当小，从而 $R\sigma'$ 接近于零时，方程(63)必有解 $u \in (0,1)$. 下面设 u 是方程(63)的解. 一旦确定了均衡值 u，依赖于 u 的 v, h, μ, a, p, q 亦随之确定，且可设 $a, q < 0, \mu, h > 0$，这些不等式可由对模型参数的一定限制保证. 如同 4.3.3 小节中所作的，利用 $\mu q < 0$ 及式(58a)、式(58b)可验证值函数 $V = aH^pK^q$ 的设定正确，这些都不必一一写出.

由式(62)与式(64)所表达的 $h(u)$ 与 $q(u)$ 都不很简单，这对于进一步的模型分析将是一个障碍. 如同在 4.3.3 小节中一样，有一个值得注意的特殊情况，即 $\alpha = \beta$ 的情况. $\alpha = \beta$ 意味着物质产品与人力资本的"产出"依据同样的"生产函数"，这当然未必尽合现实，但这种简化有助于获得更肯定的结果. 若 $\alpha = \beta$，则 $b = 1$ (依式(53))，$u = v$ (依式(54))，

$$h = \frac{\alpha' C_I}{\alpha C_Y}; \qquad (\text{用式}(62))$$

$$B = (\alpha'/\alpha)^{\alpha'} u C_I^{\alpha'} C_Y^{\alpha}, \quad \psi = (\alpha/\alpha')^{\alpha} u' C_I^{\alpha'} C_Y^{\alpha}; \quad (\text{用式}(56)) \tag{65}$$

$$\mu = \frac{C_I^{\alpha'} C_Y^{\alpha}(u - \alpha)}{\alpha^{\alpha'} \alpha'^{\alpha}}; \tag{66}$$

$$q = \alpha\sigma', \quad p = \alpha'\sigma'. \qquad (\text{用式}(64))$$

将以上所得的 μ, ψ, q 代入方程(63)，可解出

$$u = 1 - \frac{\alpha'}{\sigma} + \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{\alpha} \frac{R}{\sigma C_I^{\alpha'} C_Y^{\alpha}}. \tag{67}$$

C. 参数的作用

类似于4.3.3小节，考虑参数C_I, C_Y与σ_K^2的作用，其中C_I与C_Y可分别看作人力资本与物质产品的生产力参数. 例如，C_Y是反映生产部门的技术水平、管理状况、工作效率等的一个综合指标. 鉴于均衡值对于C_I, C_Y, σ_K^2依赖关系的复杂性(例如参见式(62)与式(64))，首先考虑$\alpha=\beta$这一特殊情况. 为得到确定的结论，还作以下假定：σ_K^2相对于其他参数是偏小的，因而可设$R>0$且R也是偏小的(注意ρ通常是较小的). 由式(67)直接看出

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda}<0, \quad \lambda=C_I, C_Y, \sigma_K^2.$$

由此可见，生产部门或教育部门效率的提高或风险加大，都会促使物质资本流向教育部门. 其次，由式(65)有

$$\frac{\partial \psi}{\partial C_I}=\frac{\alpha' \psi}{C_I}-\frac{\psi}{u'} \frac{\partial u}{\partial C_I}>0;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial C_Y}=\frac{\alpha \psi}{C_Y}-\frac{\psi}{u'} \frac{\partial u}{\partial C_Y}>0;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma_K^2}=-\frac{\psi}{u'} \frac{\partial u}{\partial \sigma_K^2}>0.$$

这就表明，提高生产部门或教育部门的效率、加大风险，都会加快经济增长.

为做得更精细些，将式(67)写作$u=1-\dfrac{\alpha'}{\sigma}+g$，则有

$$C_I \frac{\partial u}{\partial C_I}=-\alpha' g, \quad C_Y \frac{\partial u}{\partial C_Y}=-\alpha g; \tag{68}$$

$$u-\alpha=-\frac{\alpha' \sigma'}{\sigma}+g>0,$$

且g是偏小的. 下面就要用到这些结果.

取定$K_0>0$，令$V=aH_0^p K_0^q=ah^p K_0^{\sigma'}$，则

$$V=\frac{K_0^{\sigma'}}{\alpha\sigma' \mu^{\sigma}}; \qquad \text{(用式(58b)与}q=\alpha\sigma'\text{)}$$

$$-\ln(\alpha\sigma' V)=\sigma \ln \mu-\sigma' \ln K_0 \triangleq Q. \tag{69}$$

依次求出

$$C_I \frac{\partial Q}{\partial C_I}=\frac{\sigma C_I}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial C_I}=\alpha' \sigma+\frac{\sigma C_I}{u-\alpha} \frac{\partial u}{\partial C_I} \quad \text{(用式(66))}$$

$$=\alpha' \sigma\left(1-\frac{g}{u-\alpha}\right)>0; \quad \text{(用式(68))}$$

$$C_Y \frac{\partial Q}{\partial C_Y}=\alpha \sigma\left(1-\frac{g}{u-\alpha}\right)>0; \quad \text{(用式(66)、式(68))}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_K^2}=\frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial u}{\partial \sigma_K^2}=\frac{\sigma}{u-\alpha} \frac{\partial u}{\partial \sigma_K^2}<0. \quad \text{(用式(66))}$$

由此可见，C_I 与 C_Y 有正的福利效应，而 σ_K^2 则有负的福利效应. 因为

$$C_I \frac{\partial Q}{\partial C_I} - C_Y \frac{\partial Q}{\partial C_Y} = \sigma(\alpha' - \alpha)\left(1 - \frac{g}{u - \alpha}\right),$$

上式右端与 $\alpha' - \alpha$ 同号，故当 $\alpha' > \alpha(\Leftrightarrow 0 < \alpha < 1/2)$ 时，提高教育部门的效率对于增进福利有更显著的效果；当 $\alpha' < \alpha$ 时则相反.

参 考 文 献

[1] Abel A B, Bernanke B S. Macroeconomics[M]. 2nd ed. New York: Addison-Wesley, 1995.

[2] Aghion P, Howitt P. A model of growth through creative destruction [J]. Econometrica, 1992, 60:323-351.

[3] Arnold L G. Growth welfare and trade in an integrated model of human-capital accumulation and research[J]. J. Monetary Eco., 1998, 20:81-105.

[4] Barro R J, Lee J-W. International comparisons of educational attainment [J]. J. Monetary Eco., 1993, 32:363-394.

[5] Basu S, Weil D N. Appropriate technology and growth[J]. Q. J. Eco., 1998, 113:1025-1054.

[6] Becker G S, Murphy K M, Tamura R. Human capital, fertility and economic growth[J]. J. Political Eco., 1990, 98:S12-S37.

[7] Blackbum K, Victor T V, Pozzolo A F. Research, development and human capital accumulation[J]. J. Macroeco., 2000, 2:189-206.

[8] Caballe J, Santos M S. On endogenous growth with physical and human capital[J]. J. Political Eco., 1993, 101:1042-1067.

[9] Fershtman C, Murphy K, Weiss Y. Social status, education and growth [J]. J. Political Eco., 1996, 106:108-132.

[10] Funke M, Strulik H. On endogenous growth with physical capital, human capital and product variety[J]. European Eco. Rev., 2000, 44: 491-515.

[11] Howitt P. Steady endogenous growth with population and R&D inputs growing[J]. J. Political Eco., 1999, 107:715-730.

[12] Kremer M. Population growth and technological change: one million B. C. to 1990[J]. Q. J. Eco., 1993, 108:681-716.

[13] Krugman P R. A model of innovation, technology transfer and the

world distribution of income[J]. J. Political Eco., 1979, 87:253-266.
[14] Leonard K, Tao Zhigang. The impact of public policies on innovation and imitation: the role of R&D technology in growth models[J]. Intern. Eco. Rev., 1999, 40:187-207.
[15] Nelson R R, Phelps E S. Investment in humans, technological diffusion and economic growth[J]. Amer. Eco. Rev., 1966, 56:69-75.
[16] Pack H, Pack J R. Foreign aid and the question of fungibility[J]. Rev. Eco. Statis., 1993, 75:258-265.
[17] Pecorino P. Tax structure and growth in model with human capital[J]. J. Publ. Eco., 1993, 52:251-271.
[18] Romer P M. Endogenous technological change[J]. J. Political Eco., 1990, 98:71-102.
[19] Tallman E W, Wang P. Human capital and endogenous growth: evidence from Taiwan[J]. J. Monetary Eco., 1994, 34:101-124.
[20] Uzawa H. Optimal technical change in an aggregative model of economic growth[J]. Intern. Eco. Rev., 1965, 6:18-31.

4.4 投　　资

在2.5节中我们已讨论过若干随机投资模型,现在过渡到相应的连续时间模型.本节将沿用2.5节中所设定的市场框架,即分散化的投资主体(厂商、消费者、基金会及任何以赢利为目标的投资个体)在一个随机环境中进行决策,接受由市场所决定的约束条件,并在这些条件下选择最优的投资计划,以最大化其期望折现总利润.与离散模型比较,连续时间模型有以下特点.

(i) **目标函数**:决策者的期望折现总利润

$$V = \mathrm{E}_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt}\pi(t)\mathrm{d}t,$$

其中 r 是资本利率,$\pi(t)$ 表示投资者的**动态利润函数**.一般地总有

$$\text{动态利润}(\pi) = \text{收益}(y) - \text{成本}(C),$$

但对于 y 与 C 的具体设定则有多种可能的选择.

(ii) **约束条件**:一般表示为

$$\text{资本增量}(\mathrm{d}k) = \text{投资}(I) - \text{折旧},$$

它通常是包含 k, I 的一个SDE.

投资决策问题通常是以投资 I 为控制变量、以 k 为状态变量的随机最优化

问题. 对这类问题，很少能求出最优投资计划 $I(t)$ 与最优资本增长轨道 $k(t)$ 的明显表达式. 但如果能得出联系 I 与 k 的某个公式(投资策略函数)，则亦可获得某些定性结论，因而在一定意义上可以认为问题得到解决.

4.4.1 q 理论模型

关于投资的 q 理论首先由 Robin 在确定性的条件下给出，今将其推广到含随机扰动的情况.

A. 模型与最优性条件

在 2.5 节中考虑了离散的厂商投资问题(5)，今保持其主要特征推广为一个连续时间问题：

$$\begin{cases} \max\limits_{I} \mathrm{E}_0\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-rt}\pi(t)\mathrm{d}t, \quad \pi = f(k) - w - I - C(I), & \text{(1a)} \\ \text{s.t.} \quad \mathrm{d}k = I\mathrm{d}t + \varphi\mathrm{d}u, \quad k(0) = k_0. & \text{(1b)} \end{cases}$$

其中利润函数 $\pi(\cdot)$ 明显地对应于2.5 节式(1)：$y = f(k)$ 是厂商的产出；投资成本由工资支付 w、投资购买成本 I 及调整成本 $C(I)$ 三部分组成. 此处不考虑价格因素，因而 y,w,I 均为实际变量. 仍设成本函数 $C(\cdot)$ 满足 2.5 节中的条件(2). 资本增长方程(1b)无疑是从离散的公式 $\Delta k_t = I_t$ 演变而来的，其中 $\mathrm{d}u$ 是一 Brown 运动，φ 可能与 t 或 k 有关. $\varphi\mathrm{d}u$ 表达了导致资本变动的不确定因素. 例如，投资在转化为资本过程中的随机损耗与渗漏；市场不确定性所导致的实际资本存量的随机增损；随机性的资本流动；等等. 用 $\varphi\mathrm{d}u$ 这一只口袋来装下这许多来源很不相同的扰动，未免过于粗略了，因而需要更细化的处理，需要更准确地描述不同性质的随机干扰. 在本节的最后一个模型中将作这样的处理.

问题(1)正是我们已熟知的随机最优化问题，I 与 k 分别为其控制变量与状态变量. 因 w 与 φ 可能是时变的，问题(1)一般不是自治的. 直接应用 3.3 节式(6)，可写出问题(1)的最优性条件如下：

$$\begin{cases} rV = \pi + V_t + IV_k + \dfrac{1}{2}\sigma_u^2\varphi^2 V_{kk}, & \text{(2a)} \\ 0 = -1 - C'(I) + V_k, & \text{(2b)} \\ rV_k = f'(k) + V_{tk} + (I + \sigma_u^2\varphi\varphi_k)V_{kk} + \dfrac{1}{2}\sigma_u^2\varphi^2 V_{kkk}. & \text{(2c)} \end{cases}$$

现在采取一个关键步骤：引进变量 $q = V_k$，它就是资本的边际利润，通常称为资本的影子价格[①]. 由条件(2b)有

$$q = 1 + C'(I), \quad I = C'^{-1}(q-1) \triangleq F(q).$$

---

① 变量 q 首先由 Tobin(1969)引入，且以“Tobin 的 q”著称，在很长时期内是投资理论中的一个标准概念.

用Itô公式求出

$$\mathrm{d}q=\mathrm{d}V_k=V_{tk}\mathrm{d}t+V_{kk}\mathrm{d}k+\frac{1}{2}V_{kkk}(\mathrm{d}k)^2$$

$$=\left(V_{tk}+IV_{kk}+\frac{1}{2}\sigma_u^2\varphi^2V_{kkk}\right)\mathrm{d}t+\varphi V_{kk}\mathrm{d}u \quad (\text{用式(1b)})$$

$$=[r\,q-f'(k)-\varphi\varphi_kV_{kk}]\mathrm{d}t+\varphi V_{kk}\mathrm{d}u. \quad (\text{用式(2c)})$$

这与方程(1b)一起构成关于 (k,q) 的如下SDE 系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}k=F(q)\mathrm{d}t+\varphi\mathrm{d}u, & (3\mathrm{a})\\ \mathrm{d}q=[r\,q-f'(k)]\mathrm{d}t-\varphi V_{kk}(\varphi_k\mathrm{d}t-\mathrm{d}u). & (3\mathrm{b})\end{cases}$$

若 $\varphi=0$, 即扰动消失,则方程组(3)简化为

$$\begin{cases}\dot{k}=F(q),\\ \dot{q}=r\,q-f'(k).\end{cases} \tag{3$'$}$$

方程组(3)′正是熟知的 q 理论模型的微分方程组,对于它容易作出完全的分析.

B. 某些结论

SDE(3)通常是非线性的,况且未知 V_{kk} 的表达式,因而一般无法求出其显式解.不过,仍然可从方程组(3)得出某些定性结论.

下面设 $\varphi_k=0$, 记 $\omega=\varphi V_{kk}$, 于是方程(3b)可写成

$$\mathrm{d}q=r\,q\mathrm{d}t+[-f'(k)\mathrm{d}t+\omega\mathrm{d}u]. \tag{4}$$

将 $f'(k)$ 与 ω 都看作 t 的函数,利用3.2节式(22)从式(4)解出

$$q(s)=\mathrm{e}^{r(s-t)}q(t)+\int_t^s\mathrm{e}^{r(s-\tau)}[-f'(k(\tau))\mathrm{d}\tau+\omega(\tau)\mathrm{d}u(\tau)];$$

$$\mathrm{E}_t[q(s)\mathrm{e}^{-rs}]=q(t)\mathrm{e}^{-rt}-\int_t^s\mathrm{e}^{-r\tau}\mathrm{E}_t[f'(k(\tau))]\mathrm{d}\tau. \quad (s\geqslant t\geqslant 0) \tag{5}$$

由式(5)可得出两个有价值的结论.

(i) 直接从式(5)推出以下两条件等价:

$$\lim_{s\to\infty}\mathrm{E}_t[q(s)\mathrm{e}^{-rs}]=0; \tag{6$_t$}$$

$$q(t)=\int_t^\infty\mathrm{e}^{r(t-\tau)}\mathrm{E}_t[f'(k(\tau))]\mathrm{d}\tau. \tag{7$_t$}$$

式 $(6)_t$ 可看作某种横截性条件(对照4.2节式$(2)_{t}$!),要求其满足是合理的.一旦认定 式$(6)_t$ 成立,则等式 $(7)_t$ 亦必成立.注意到 $I=F(q)$,从式$(7)_t$ 得出如下**投资公式**:

$$I(t)=F\left(\int_t^\infty\mathrm{e}^{r(t-\tau)}\mathrm{E}_t[f'(k(\tau))]\mathrm{d}\tau\right) \quad (t\geqslant 0), \tag{8}$$

这正好与2.5节中的式(9)相当.式(8)表明,投资取决于对未来边际产出的预期,而并非仅仅取决于当前的投资收益.显然,这是一个类似于"持久性收入理论"的结论.为使式(8)更简单些,可取二次成本函数 $C(I)=(m/2)I^2$ (参看2.5

节式(3)),此时 $C'(I)=mI$,于是 $F(q)=(q-1)/m$. 以此代入式(8)得

$$I(t)=\frac{1}{m}\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{r(t-\tau)}\mathrm{E}_t[f'(k(\tau))-r]\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{m}\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{r(t-\tau)}\mathrm{E}_t f'(k(\tau))\mathrm{d}\tau-\frac{1}{m}. \tag{9}$$

若进而设 $f(k)=Ak$,从而 $f'(k)=A$,则从式(9)得出

$$I=(A-r)/mr,$$

此时 I 与 t 无关.

(ii) 因 $f'(\cdot)\geqslant 0$,直接从式(5)看出

$$\mathrm{E}_t[q(s)\mathrm{e}^{-rs}]\leqslant q(t)\mathrm{e}^{-rt}\quad(s\geqslant t\geqslant 0). \tag{10}$$

这表明 $q(t)\mathrm{e}^{-rt}$ 是一个上鞅. 粗略地说,这意味着,在统计平均的意义上,$q(t)\mathrm{e}^{-rt}$ 是单调下降的. 若取 $C(\cdot)$ 为二次效用函数,从而 $I=(q-1)/m$,则从式(10)得出

$$\mathrm{E}_t I(s)\leqslant I(t)\mathrm{e}^{r(s-t)}+\frac{1}{m}[\mathrm{e}^{r(s-t)}-1]\quad(s\geqslant t\geqslant 0).$$

这一估计并不精确,但亦不失为有用.

C. 显式解

今设 $C(I)=(m/2)I^2$, $f(k)-w=Ak$, $\varphi=pk$, A,m,p,r 为常数,u 为标准 Brown 运动. 若将问题(1)与3.3节中问题(16)对照,读者会发现二者非常接近:分别以 I 与 k 代替 x 与 y,取 $a=-1,b=c=q=0$,则方程(1b)重合于3.3节式(16b);

$$\pi=Ak-I-\frac{m}{2}I^2 \tag{11}$$

与3.3节式(16a)中的 $U=x-(m/2)x^2$ 一样,皆为控制变量的二次函数. 不过,$\pi(\cdot)$ 与 $U(\cdot)$ 的函数形式毕竟有差别,因而并不能直接套用3.3.3A 中的结论,但可沿用3.3.3A 中的方法及其中仅取决于预算约束的那些公式.

设 $V=a_0+a_1k+a_2k^2$ 是问题(1)的值函数,则

$$I=\frac{q-1}{m}=\frac{V'-1}{m}=\frac{2a_2k-a'_1}{m}. \tag{12}$$

将 V 与 I 的表达式代入方程(2a),得出(对照3.3节式(18))

$$\begin{cases}2a_2/m=r-p^2\triangleq\xi, & (13\mathrm{a})\\ p^2a_1=A-\xi, & (13\mathrm{b})\\ r\,a_0=a'^2_1/2m. & (13\mathrm{c})\end{cases}$$

以式(12)代入方程(1b)消去 I,得

$$\mathrm{d}k=(\xi k-a'_1/m)\mathrm{d}t+pk\mathrm{d}u.$$

与3.3节式(19)、式(20)对照得出

$$k(t) = (g + k_0)\mathrm{e}^{\theta t + pu(t)} - g + h\int_0^t \mathrm{e}^{\theta(t-s) + pu(t) - pu(s)}\mathrm{d}u(s),$$

其中

$$\theta = r - \frac{3p^2}{2}, \quad g = \frac{A - r}{\eta m p^2}, \quad h = \frac{r - A}{\eta m p} = - gp, \tag{14}$$

约定 $\eta = r - 2p^2$. 以式(12)代入式(11)得

$$\pi = b_0 + b_1 k + b_2 k^2,$$

其中(参照3.3节式(23))

$$\begin{cases} b_2 = -\dfrac{2a_2^2}{m} = -\dfrac{m\xi^2}{2}, & \text{(15a)} \\ b_1 = A - \dfrac{2a_1 a_2}{m} = A - a_1\xi, & \text{(15b)} \\ b_0 = \dfrac{1 - a_1^2}{2m}. & \text{(15c)} \end{cases}$$

依3.3节式(26),使 $V(k_0) = \mathrm{E}_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt}\pi(t)\mathrm{d}t$ 成立的充要条件是

$$\begin{cases} a_2 = - b_2/\xi, & \text{(16a)} \\ a_1 = p^{-2}(b_1 - 2b_2 g) - 2\xi^{-1}b_2 g, & \text{(16b)} \\ r\, a_0 = b_0 - b_1 g + b_2 g^2 + gp^{-2}r(b_1 - 2b_2 g) - b_2\xi^{-1}(g^2 r + h^2). & \text{(16c)} \end{cases}$$

结合式(13a)与式(15a)可看出式(16a)成立. 结合式(13)～式(15)与式(16b)可得出 $p^2(A - r) = 0$. 由3.3节式(25)说明必须 $p^2 > r > 0$,故只能 $A = r$. 结合式(14)得 $g = 0, h = 0$; 由式(13b)得 $a_1 = 1$; 然后由式(13c)与式(15c)得 $a_0 = 0 = b_0$,这表明式(16c)成立. 于是就得出结论:仅当 $p^2 > r = A$ 时问题有二次值函数 $V(\cdot)$,且

$$V(k) = k + \frac{m(r - p^2)}{2}k^2.$$

注意到

$$k(t) = k_0\exp\left[\left(r - \frac{3}{2}p^2\right)t + pu(t)\right],$$

可以验证当 $r < p^2$ 时横截性条件满足,即 $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{E}_0[V(k(t))\mathrm{e}^{-\rho t}] = 0$. 上面得出的条件 $A = r$ 初看起来颇令人惊异,实际上并不奇怪: $f(k) - w = Ak$ 表明 A 是投资的期望回报率,仅当它与资本利率一致时,决策问题才有二次值函数.

4.4.2 二次成本函数模型

对于4.4.1小节中的模型可提出多种修正. 约束方程(1b)的意义已经十分明显,难以做什么改变,关注点自然集中到利润函数 π 的构成上. 而利润 (π) = 收益(y) − 成本(C) 这一格式似乎也不容改变,但成本 C 实际上比较复杂,可以有多种不同的描述, q 理论模型中取 $C = w + I + C(I)$ 未必是唯一的选择. 下

面模型中提出的成本函数,可看作其他可能选择的一个典型代表.

A. 模型与最优性条件

如上面引言中所述,新的投资模型必然具有类似式(1)的如下形式:

$$\begin{cases} \max\limits_{I} \mathrm{E}_0\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-rt}\pi(t)\mathrm{d}t, \quad \pi = y - C, & \text{(17a)} \\ \text{s.t.} \quad \mathrm{d}k = I\mathrm{d}t + \varphi\mathrm{d}u, & \text{(17b)} \end{cases}$$

只是对于 y 与 C 现在另有解释. 首先,此处 y 不像问题(1)中一样取决于某个生产函数 $f(k)$,而设定为一个与个体资本积累无关的给定随机函数. 其次,成本 C 表为如下二次函数:

$$C = \frac{1}{2}(ay - k)^2 + \frac{m}{2}I^2. \tag{18}$$

式(18)中 $(m/2)I^2$ 依然可看作投资调整成本;至于第一项,则可解释为投资偏差成本. 厂商的理想投资应当是使资本存量 k 紧追产出,即使 $k = ay$,a 是正系数;与这一目标值比较,投资过多或过少都会急剧增加成本. 综合起来可以说,问题(17)表明厂商的投资决策目标是通过降低成本来最大化期望折现利润,而不是追求提高产出;产出取决于市场需求,并非由个体自由决定. 对于现代经济中许多行业来说,以上设定是具有合理性的.

由于 π 的构成改变,最优性条件亦应作相应变动:

$$\begin{cases} rV = \pi + V_t + IV_k + \frac{1}{2}\sigma_u^2\varphi^2 V_{kk}, & \text{(19a)} \\ 0 = -mI + V_k, & \text{(19b)} \\ rV_k = ay - k + V_{tk} + (I + \sigma_u^2\varphi\varphi_k)V_{kk} + \frac{1}{2}\sigma_u^2\varphi^2 V_{kkk}. & \text{(19c)} \end{cases}$$

结合式(19b)与式(19c)可以得出

$$\begin{aligned} m\mathrm{d}I &= \mathrm{d}V_k = \left(V_{tk} + IV_{kk} + \frac{1}{2}\sigma_u^2\varphi^2 V_{kkk}\right)\mathrm{d}t + \varphi V_{kk}\mathrm{d}u \quad \text{(用式(19b))} \\ &= (mrI - ay + k - \sigma_u^2\varphi\varphi_k V_{kk})\mathrm{d}t + \varphi V_{kk}\mathrm{d}u; \quad \text{(用式(19c))} \end{aligned}$$

这与式(17b)一起构成关于 (k, I) 的SDE系统:

$$\begin{cases} \mathrm{d}k = I\mathrm{d}t + \varphi\mathrm{d}u, & \text{(20a)} \\ m\mathrm{d}I = (mrI - ay + k)\mathrm{d}t - \varphi V_{kk}(\sigma_u^2\varphi_k\mathrm{d}t - \mathrm{d}u). & \text{(20b)} \end{cases}$$

当扰动消失时,式(20)退化为如下ODE系统:

$$\begin{cases} \dot{k} = I, \\ m\dot{I} = mrI + k - ay. \end{cases} \tag{20$'$}$$

式(20)′并非自治系统,除非 y 为常数.

B. 投资公式

今导出一个类似于式(9)的公式. 如同在4.4.1B中一样,设 $\varphi_k = 0, \omega =$

φV_{kk}. 将方程(20b)写成

$$\mathrm{d}(mI) = r(mI)\mathrm{d}t + [(k - ay)\mathrm{d}t + \omega \mathrm{d}u].$$

由此积出

$$mI(s) = \mathrm{e}^{r(s-t)} mI(t) + \int_t^s \mathrm{e}^{r(s-\tau)} \{[k(\tau) - ay(\tau)]\mathrm{d}\tau + \omega(\tau)\mathrm{d}u(\tau)\} \quad (s \geqslant t \geqslant 0);$$

然后得

$$\mathrm{E}_t[I(s)\mathrm{e}^{-rs}] = I(t)\mathrm{e}^{-rt} + \frac{1}{m}\int_t^s \mathrm{e}^{-r\tau}\mathrm{E}_t[k(\tau) - ay(\tau)]\mathrm{d}\tau \quad (s \geqslant t \geqslant 0).$$

这表明以下两条件等价：

$$\lim_{s\to\infty} \mathrm{E}_t[I(s)\mathrm{e}^{-rs}] = 0, \tag{21}$$

$$I(t) = \frac{1}{m}\int_t^\infty \mathrm{e}^{r(t-\tau)}\mathrm{E}_t[ay(\tau) - k(\tau)]\mathrm{d}\tau \quad (t \geqslant 0). \tag{22}$$

式(21)正是我们已熟知的横截性条件，要求它被满足是很自然的. 但一旦认定式(21)成立，就应接受式(22)为一个合理的投资公式. 式(22)表明，最优投资 $I(t)$ 取决于对未来产出与资本存量的预期，而并非仅仅取决于当前的产出与资本存量. 显然，公式(22)正好与公式(9)相对应.

C. 显式解

如同在 4. 4. 1C 中一样设 $\varphi = pk$，u 为标准Brown 运动；其次设 $y = \mathrm{const}$，今用 3. 3. 3A 中的方法来求问题(17)的显式解.

设问题(17)有二次值函数 $V = a_0 + a_1k + a_2k^2$. 由条件(19b)得出

$$I = (a_1 + 2a_2k)/m. \tag{23}$$

将 V 与 I 的表达式代入Bellman 方程(19a)，得出(参照式(13))

$$\begin{cases} r\,a_0 = y - \dfrac{a^2y^2}{2} + \dfrac{a_1^2}{2m}, \\ r\,a_1 = ay + \dfrac{2a_1a_2}{m}, \quad \text{即} \quad a_1 = \dfrac{amy}{m\rho - 2a_2}, \\ r\,a_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{2a_2^2}{m} + a_2p^2. \end{cases}$$

仍设 $\xi = r - p^2$ (见式(13a)). 以式(23)与 $\varphi = pk$ 代入式(17b)得

$$\mathrm{d}k = \left(\frac{2a_2}{m}k + \frac{a_1}{m}\right)\mathrm{d}t + pk\mathrm{d}u.$$

由此解出(套用3. 3 节式(20))

$$k(t) = (g + k_0)\mathrm{e}^{\theta t + pu(t)} - g + h\int_0^t \mathrm{e}^{\theta(t-s) + pu(t) - pu(s)}\mathrm{d}u(s),$$

形式上这与 4. 4. 1C 中的结果完全相同，只是现在

$$\theta = \frac{2a_2}{m} - \frac{p^2}{2},\quad g = \frac{a_1}{m\eta},\quad h = -\frac{a_1 p}{m\eta} = -gp,\quad \eta = \frac{2a_2}{m} - p^2.$$

以式(23)代入式(18)，得 $\pi = y - C = b_0 + b_1 k + b_2 k^2$，其中(参照式(15))

$$\begin{cases} b_0 = y - \dfrac{a^2 y^2}{2} - \dfrac{a_1^2}{2m}, & (24a)\\ b_1 = ay - \dfrac{2a_1 a_2}{m} = 2ay - \rho a_1, & (24b)\\ b_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{2a_2^2}{m} = -(1 + a_2\xi). & (24c)\end{cases}$$

如同在4.4.1C中一样，使 $V(k_0) = \mathrm{E}_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt}\pi(t)\mathrm{d}t$ 成立的充要条件是式(16)成立. 而由式(16a)有 $b_2 = -a_2\xi$，这显然与式(24c)矛盾. 由此可见，在所设条件下，问题并无二次值函数.

4.4.3　库存投资

A. 模型与最优性条件

在问题(17)中，厂商选择投资 I，以最大化其期望折现利润，而产出是给定的. 现在换一个角度考虑：I 表示产品库存量，它并不能由厂商选择，但如同式(17)中的资本 k 一样服从一定约束条件；而产出 y 是由厂商选定的，厂商的决策目标是最小化期望折现成本，成本函数为

$$C = \frac{a}{2}(y - z)^2 + \frac{1}{2}(y + I - s)^2, \tag{25}$$

其中 a 是正常数，z 是产出的某个参照值，s 是销售量，$z(\cdot)$ 与 $s(\cdot)$ 都是给定的随机函数. 在理想的情况下，厂商选择 $y = z$，使 $y + I = s$（这意味着产出与库存全部售出）. 但以上两个等式绝难兼顾，因而必然要付出一定成本，且成本是偏差 $|y - z|$，$|y + I - s|$ 的二次函数. 在确定性情况下，易见有 $dI = (y - s)dt$. 但市场的随机波动使得上式右端增加一个扰动项 φdu. 这样，厂商的决策问题可表为

$$\begin{cases} \min\limits_{y} \mathrm{E}_0\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt}C(t)\mathrm{d}t,\quad C(\cdot)\text{ 依式(25)}, & (26a)\\ \text{s.t.}\quad \mathrm{d}I = (y - s)\mathrm{d}t + \varphi\mathrm{d}u,\quad I(0) = I_0. & (26b)\end{cases}$$

只要以 $-C$ 取代 C，就可将问题(26)转化成一个最大化问题，其值函数恰为 $-V(t,I)$，$V(t,I)$ 为问题(26)的值函数. 因此，仍然可依据3.3节式(6)写出问题(26)的最优性条件如下：

$$\begin{cases} rV = C + V_t + (y - s)V_I + \dfrac{1}{2}\sigma_u^2\varphi^2 V_{II}, & (27a)\\ 0 = a(y - z) + y + I - s + V_I, & (27b)\\ rV_I = y + I - s + V_{tI} + (y - s + \sigma_u^2\varphi\varphi_I)V_{II} + \dfrac{1}{2}\sigma_u^2\varphi^2 V_{III}. & (27c)\end{cases}$$

仿照4.4.1小节中的做法，令 $q = V_I$，则

$$dq = dV_I = \left[V_{tI} + (y-s)V_{II} + \frac{1}{2}\sigma_u^2\varphi^2 V_{III}\right]dt + \varphi V_{II}du$$
$$= (r\,q - y - I + s - \sigma_u^2\varphi\varphi_I V_{II})dt + \varphi V_{II}du. \quad (用式(27c))$$
$$= (rq + q + ay - az - \sigma_u^2\varphi\varphi_I V_{II})dt + \varphi V_{II}du. \quad (用式(27b))$$

这就得到关于 (I,q) 的SDE：

$$\begin{cases} dI = (y-s)dt + \varphi du, & (28a) \\ dq = (r\,q + q + ay - az)dt - \varphi V_{II}(\sigma_u^2\varphi_I dt - du), & (28b) \end{cases}$$

它可与SDE(3)类比.若扰动消失，则式(28)退化为

$$\begin{cases} \dot{I} = y - s, \\ \dot{q} = (r+1)q + a(y-z). \end{cases} \quad (28)'$$

式(28)′不必为自治系统，除非 s，z 为常数.

B. 库存公式

现在利用方程(28b)来导出类似于式(9)与式(22)的公式.设 $\varphi_I = 0$，令 $\omega = \varphi V_{II}$. 将方程(28b)写成

$$dq = \bar{r}q dt + [(ay - az)dt + \omega du].$$

由此积出

$$q(s) = e^{\bar{r}(s-t)}q(t) + \int_t^s e^{\bar{r}(s-\tau)}\{a[y(\tau) - z(\tau)]d\tau + \omega(\tau)du(\tau)\},$$

然后得

$$E_t[q(s)e^{-\bar{r}s}] = q(t)e^{-\bar{r}t} + a\int_t^s e^{-\bar{r}\tau}E_t[y(\tau) - z(\tau)]d\tau \quad (s \geqslant t \geqslant 0).$$

这表明以下两条件等价：

$$\lim_{s\to\infty} E_t[q(s)e^{-\bar{r}s}] = 0, \quad (29)$$

$$q(t) = a\int_t^\infty e^{\bar{r}(t-\tau)}E_t[z(\tau) - y(\tau)]d\tau. \quad (30)$$

不妨设式(29)与式(30)均成立.以 $I = -q - y + s - a(y-z)$（依式(27b)）代入式(30)得

$$I(t) = s(t) - y(t) + a[z(t) - y(t)] + a\int_t^\infty e^{\bar{r}(t-\tau)}E_t[y(\tau) - z(\tau)]d\tau.$$

上式表明：$I(t)$ 取决于当前销售、产出及对未来产出的预期.直观上，这是合理的.

4.4.4 不确定利率与需求下的投资

在前面几个投资模型中，直接加入资本积累方程右端的扰动 φdu 来源不明，这就大大影响到模型的现实性.从实际观察中不难看出，影响投资决策的主要不

确定因素无非是资本利率的随机波动、市场需求的冲击、价格水平的扰动等等.一个有针对性的投资模型,无疑应明确考虑到这类不确定性.下面构成的模型涉及利率与需求的不确定性,它大体上依据Calcagnini(2000)的思想,但方法上有所改进.

A. 一般描述

现在将投资决策问题(1)修正为

$$\begin{cases} \max\limits_{I} \mathrm{E}_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-R(t)}[D^\beta(t)\pi(k(t)) - C(I(t))]\mathrm{d}t, & (31a) \\ \text{s.t.}\ \mathrm{d}k = I\mathrm{d}t, & (31b) \\ \quad \mathrm{d}r = r^\theta \mathrm{d}u_r, & (31c) \\ \quad \mathrm{d}D = D(\delta\mathrm{d}t + \mathrm{d}u_D). & (31d) \end{cases}$$

对其中出现的变量与函数解释如下:$R(t) = \int_0^t r(s)\mathrm{d}s$ 已见于4.2.1A,r 是资本利率,它并无可预期的增长,只是服从由方程(31c)描述的扰动. $\pi = \pi(k)$ 是厂商的经营利润,其中并未扣除投资成本,因而有别于问题(1)中的纯利润 π. 假定利润函数 $\pi(\cdot)$ 满足 $\pi'(\cdot) > 0, \pi''(\cdot) < 0$. 典型的例子是取 $\pi(k) = k^\alpha (0 < \alpha < 1)$. 由式(31b)描述的资本存量 k 不像问题(1)中一样直接受到扰动,但这并不意味着 k 不具随机性.仅当厂商售出其产品之后才使其利润得以实现,因而实际利润不仅依赖于资本 k,还依赖于市场需求. D^β 正是用来表达市场需求的系数:D 表示市场需求量,参数 $\beta \geqslant 0$ 表示市场需求因素的重要性,当 $\beta = 0$ 时需求因素不起作用.需求的增长依据方程(31d),假定 $\delta, \sigma_D^2 > 0$. $C(I)$ 是包括调整成本与购置成本的总投资成本,因而有别于问题(1)中的成本函数 $C(I)$. 假定 $C(\cdot) \geqslant 0, C''(\cdot) > 0, C(0) = 0$, 在一个更细致的分析中将取 $C(\cdot)$ 为简单的二次函数.

方程组(31)是以 I 为控制变量,以 k, r, D 为状态变量的自治的随机最优化问题,因而可用3.3节中的标准方法对其进行分析.不过,如我们已看到的(见4.2.2D),状态变量增多使问题显著地复杂化.幸而此处 k 不涉及扰动;为更简单些,进而假定 $\mathrm{d}u_r$ 与 $\mathrm{d}u_D$ 互不相关.以 $V = V(k, r, D)$ 记问题(31)的值函数,则由Itô公式(见3.1节式(21))有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= V_k\mathrm{d}k + V_r\mathrm{d}r + V_D\mathrm{d}D + \frac{1}{2}[V_{rr}(\mathrm{d}r)^2 + V_{DD}(\mathrm{d}D)^2 + 2V_{rD}\mathrm{d}r\mathrm{d}D] \\ &= \left(IV_k + \delta DV_D + \frac{1}{2}r^{2\theta}\sigma_r^2 V_{rr} + \frac{1}{2}\sigma_D^2 D^2 V_{DD}\right)\mathrm{d}t + \cdots \\ &= LV\mathrm{d}t + \cdots, \end{aligned}$$

其中省略的项是扰动部分.依据3.3节式(5),可将问题(31)的最优性条件表为

$$\begin{cases} rV = D^{\beta}\pi - C(I) + IV_k + \delta DV_D + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r^{2\theta} V_{rr} + \frac{1}{2}\sigma_D^2 D^2 V_{DD}, & (32a) \\ 0 = - C'(I) + V_k. & (32b) \end{cases}$$

如同前面一样，令 $q = V_k$，它就是资本的影子价格. 由条件(32b)有 $q = C'(I)$，当 $C''(\cdot) > 0$ 时可解出

$$I = C'^{-1}(q) \quad (\text{最优投资}). \tag{33}$$

令 $Q = qI - C(I)$，它可看作投资的租金. 以此代入式(32a)，得到关于 V 的如下二阶微分方程：

$$\sigma_r^2 r^{2\theta} V_{rr} + \sigma_D^2 D^2 V_{DD} + 2\delta DV_D - 2rV = - 2\pi D^{\beta} - 2Q. \tag{34}$$

关于模型分析有待解决的问题是：

(i) 求出 V 的显式解，这基于某些特殊设定；

(ii) 利用 V 的显式解进而求出 $q = V_k$ 与 $I = C'^{-1}(q)$；

(iii) 分析参数(主要是 $\delta, \sigma_r^2, \sigma_D^2$)对 V, I, k 等的影响.

现在初步讨论一下问题(i)的解法，完全的解决方法留待特殊情况考虑. 原则上，V 由微分方程(34)解出. 方程(34)可看作两个二阶线性ODE

$$\sigma_r^2 r^{2\theta} U_{rr} - 2rU = - 2Q \tag{35}$$

与

$$\sigma_D^2 D^2 W_{DD} + 2\delta DW_D - 2rW = - 2\pi D^{\beta} \tag{36}$$

的迭加，在方程(35)中 Q 视为与 r 无关，在方程(36)中 π 视为与 D 无关[①]. 设 $\theta = 3/2$ (这一设定在经济上并无特别依据，只是为了便于求出显式解)，则用标准的ODE 方法可求得方程(35)的通解[②]

$$U = Ar^{\lambda_1} + Br^{\lambda_2} + \frac{Q}{r(1 - \sigma_r^2)}, \tag{37}$$

其中 A, B 与 r 无关，λ_1, λ_2 是特征方程

$$\lambda^2 - \lambda - \frac{2}{\sigma_r^2} = 0$$

的两个根，可设 $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$，即

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{8}{\sigma_r^2}}\right). \tag{38}$$

类似地，方程(36)有通解

$$W = MD^{\mu_1} + ND^{\mu_2} + \frac{D^{\beta}\pi}{r - m}, \tag{39}$$

其中 M, N 与 D 无关，μ_1, μ_2 是特征方程

---

① 投资 I 必然与 r 有关，$\pi(k)$ 也必定与 D 有关，因而这些设定都不尽合理.

② 易见方程(35)与方程(36)都是所谓Euler 方程.

$$\mu^2-\left(1-\frac{2\delta}{\sigma_D^2}\right)\mu-\frac{2r}{\sigma_D^2}=0$$

的两个根，可设 $\mu_1<0<\mu_2$，即

$$\mu_{1,2}=\frac{1}{2}-\frac{\delta}{\sigma_D^2}\mp\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta}{\sigma_D^2}\right)^2+\frac{2r}{\sigma_D^2}}; \tag{40}$$

而

$$m=\beta\,\delta-\frac{1}{2}\beta\,\beta'\sigma_D^2. \tag{41}$$

若令 $V=U+W$，即

$$V=Ar^{\lambda_1}+Br^{\lambda_2}+MD^{\mu_1}+ND^{\mu_2}+\frac{D^\beta\pi}{r-m}+\frac{Q}{r(1-\sigma_r^2)},$$

且设 A,B,M,N 均与 r,D 无关，并忽略 μ_1,μ_2 对 r 的依赖，则可验知 V 满足方程(34).

且不说以上分析已显漏洞，即使 V 完全满足方程(34)，如何决定 A,B,M,N（它们不免与 k 有关），使得 V 确为问题(31)的值函数，仍然是一复杂问题. 不过，以上分析毕竟提供了一条思路，下面将在更特殊的设定下沿此思路解决问题.

B. 利率不确定情况

假定 $\beta=0$，即不考虑需求的影响，则问题(31)简化为

$$\begin{cases}\max\limits_I \mathrm{E}_0\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-R(t)}[\pi(k(t))-C(I(t))]\mathrm{d}t, & (42\mathrm{a})\\ \text{s.t. } \mathrm{d}k=I\mathrm{d}t, & (42\mathrm{b})\\ \qquad \mathrm{d}r=r^{3/2}\mathrm{d}u_r. & (42\mathrm{c})\end{cases}$$

以 $V=V(k,r)$ 记问题(42)的值函数，记号 q,Q 的意义如上段，则 Bellman 方程可写为

$$\sigma_r^2r^3V_{rr}-2rV=-2\pi-2Q. \tag{43}$$

分别以 $\pi+Q$ 与 V 替代 Q 与 U，用方程(35)的解公式(37)，可得出[①]

$$V=\frac{\pi(k)+Q}{r(1-\sigma_r^2)}+A(k)r^{\lambda_1}+B(k)r^{\lambda_2},$$

其中 λ_1,λ_2 依式(38). 注意到 V 是期望折现纯利润，由其实际意义知 $V\geqslant 0$，且 V 与 r 负相关，故不妨设 $\pi+Q>0,\sigma_r^2<1,A(k)\geqslant 0,B(k)\equiv 0$. 约定 $\lambda_1=\lambda$，将 V 重新写作

$$V=\frac{\pi(k)+Q}{r(1-\sigma_r^2)}+A(k)r^{\lambda}. \tag{44}$$

由此进而得出

---

① 因未必能排除 Q 与 r 有关，此处所用的方法并不严谨. 参看前页的脚注.

$$q = V_k = \frac{\pi'(k)}{r(1-\sigma_r^2)} + A'(k)r^\lambda; \tag{45}$$

$$A'(k) = \frac{q}{r^\lambda} - \frac{\pi'(k)}{r^{\lambda+1}(1-\sigma_r^2)}.$$

为从 $q = C'(I)$ 求得 q 的具体表达式，依 Abel 等(1997)取

$$C(I) = aI + bI^{n/(n-1)}, \tag{46}$$

其中 $a,b > 0$，n 为正偶数. 显然，aI 与 $bI^{n/(n-1)}$ 分别为投资的购置成本与调整成本，a 就是资本价格. 于是

$$\begin{cases} q = C'(I) = a + \dfrac{bn}{n-1}I^{1/(n-1)}, & (47a) \\ I = \left[\dfrac{(n-1)(q-a)}{bn}\right]^{n-1}, & (47b) \\ Q = \left(\dfrac{n-1}{b}\right)^{n-1}\left(\dfrac{q-a}{n}\right)^n. & (47c) \end{cases}$$

注意最优投资 I 与 $(q-a)$ 同号，而 Q 总是非负的(这正是选择成本函数(46)的妙处!). 直观上，若 $q > a$，即资本的影子价格高于购买价格，则投资者选择投资；若 $q < a$，则投资者选择撤资.

现在考虑参数 σ_r^2 的作用. 设 $A(k) \equiv 0$，则

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial \sigma_r^2} = \frac{\pi'(k)}{\pi(k)+Q}\frac{\partial k}{\partial \sigma_r^2} + \frac{1}{1-\sigma_r^2}; \quad (\text{用式(44)}) \tag{48}$$

$$0 = \frac{\pi''(k)}{\pi'(k)}\frac{\partial k}{\partial \sigma_r^2} + \frac{1}{1-\sigma_r^2}, \quad (\text{用式(45)}) \tag{49}$$

其中用到 Q,q 与 σ_r^2 无关①. 由式(49)推出 $\partial k/\partial \sigma_r^2 > 0$，进而从式(48)得出 $\partial V/\partial \sigma_r^2 > 0$. 由此可见，利率的不确定性促使投资增加，厂商的期望折现利润上升.

读者必定注意到，此处及本节它处所考虑的投资量 I 是容许为负的，这就意味着我们所讨论的投资实际上是可逆投资. 若限定 $I \geqslant 0$，则投资成为不可逆的. 不可逆投资无疑有其现实性，因而亦有研究之必要，但在方法上需作某些修改，此处已不打算提及了.

C. 不确定需求情况

设 r 是正常数，$C(I) = I$，则问题(31)简化为

$$\begin{cases} \max\limits_I \mathrm{E}_0\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt}[D^\beta(t)\pi(k(t)) - I(t)]\mathrm{d}t, \\ \text{s.t. } \mathrm{d}k = I\mathrm{d}t, \\ \qquad \mathrm{d}D = D(\delta\mathrm{d}t + \mathrm{d}u_D). \end{cases}$$

① 如果承认前面实际上已用到的设定—— Q 与 r 无关，则 Q,q 自然与 σ_r^2 无关. 问题是前一设定已有疑问，因而此处的设定亦不能说毫无问题.

取 $C(I)=I$ 意味着完全忽略调整成本，这未免过于粗略，但它使问题明显简化.首先，因有

$$\mathrm{E}_0\int_0^\infty e^{-rt}I(t)\mathrm{d}t=\mathrm{E}_0\int_0^\infty e^{-rt}\mathrm{d}k(t) \qquad (\text{用 } \mathrm{d}k=I\mathrm{d}t)$$

$$=-k_0+r\mathrm{E}_0\int_0^\infty e^{-rt}k(t)\mathrm{d}t, \quad (\text{用分部积分与横截性条件})$$

故不妨以 k 替代 I 作为控制变量，将问题简化为

$$\begin{cases}\max\limits_k \mathrm{E}_0\int_0^\infty e^{-rt}[D^\beta(t)\pi(k(t))-rk(t)]\mathrm{d}t, & (50\mathrm{a})\\ \mathrm{s.t.}\ \mathrm{d}D=D(\delta\mathrm{d}t+\mathrm{d}u_D),\quad D(0)=D_0. & (50\mathrm{b})\end{cases}$$

对于问题(50)，易写出其最优性条件为

$$\begin{cases}rV=D^\beta\pi(k)-rk+\delta DV_D+\frac{1}{2}\sigma_D^2D^2V_{DD}, & (51\mathrm{a})\\ 0=D^\beta\pi'(k)-r. & (51\mathrm{b})\end{cases}$$

从式(51b)解出 $k=\pi'^{-1}(rD^{-\beta})$ 代入式(51a)，可消去式(51a)中的 k. 为便于求解，下面取 $\pi(k)=k^\alpha(0<\alpha<1)$，从而

$$k=(\alpha D^\beta/r)^{1/\alpha'}. \tag{52}$$

这就将方程(51a)化为

$$\begin{cases}\sigma_D^2D^2V_{DD}+2\delta DV_D-2rV=-2\alpha_1D^{\beta_1},\\ \alpha_1=r^{-\alpha/\alpha'}(\alpha^{\alpha/\alpha'}-\alpha^{1/\alpha'})>0,\quad \beta_1=\beta/\alpha'>0.\end{cases} \tag{53}$$

分别以 V,α_1,β_1 替代 W,π,β，用方程(36)的解公式(39)，得

$$V=MD^{\mu_1}+ND^{\mu_2}+\frac{\alpha_1D^{\beta_1}}{r-m},$$

其中 M,N 为常数，μ_1,μ_2 依式(40)，

$$r-m=r-\beta_1\delta+\frac{1}{2}\beta_1\beta'_1\sigma_D^2$$

$$=-\frac{\sigma_D^2}{2}\left[\beta_1^2-\beta_1\left(1-\frac{2\delta}{\sigma_D^2}\right)-\frac{2r}{\sigma_D^2}\right]$$

$$=\frac{\sigma_D^2}{2}(\mu_2-\beta_1)(\beta_1-\mu_1).$$

考虑到 V 必定与 D 正相关且应 $V\geqslant 0$，不妨设 $M=0,N\geqslant 0,r>m$；后者相当于 $0<\beta_1<\mu_2$. 其次，用3.2节式(20)′从方程(50b)解出

$$D=D_0\exp[(\delta-\sigma_D^2/2)t+u_D(t)] \quad (t\geqslant 0). \tag{54}$$

于是

$$\mathrm{E}_0[e^{-rt}D^{\mu_2}(t)]=D_0^{\mu_2}\exp\left[-rt+\mu_2\left(\delta-\frac{\sigma_D^2}{2}\right)t+\frac{\mu_2^2\sigma_D^2}{2}t\right]=D_0^{\mu_2},$$

$$E_0[e^{-rt}D^{\beta_1}(t)] = D_0^{\beta_1}\exp\left[-rt+\beta_1\left(\delta-\frac{\sigma_D^2}{2}\right)t+\frac{\beta_1^2\sigma_D^2}{2}t\right]$$
$$= D_0^{\beta_1}\exp\left[\frac{\sigma_D^2 t}{2}(\beta_1-\mu_1)(\beta_1-\mu_2)\right]\to 0. \quad (t\to\infty)$$

由此可见,为使 $V(D)$ 满足横截性条件,应取 $N=0$. 于是

$$V=\frac{2\alpha_1 D^{\beta_1}}{\sigma_D^2(\mu_2-\beta_1)(\beta_1-\mu_1)}=\frac{\alpha_1 D^{\beta_1}}{r-m}. \tag{55}$$

另一方面,取定 $D_0>0$, 直接依式(50a)可算出最优值

$$V(D_0)=E_0\int_0^\infty e^{-rt}[D^\beta(t)k^\alpha(t)-rk(t)]dt$$
$$=E_0\int_0^\infty \alpha_1 e^{-rt}D^{\beta_1}(t)dt \qquad (用式(52))$$
$$=\alpha_1 D_0^{\beta_1}\int_0^\infty e^{-rt}E_0\exp\left[\beta_1\left(\delta-\frac{\sigma_D^2}{2}\right)t+\beta_1 u_D(t)\right]dt \qquad (用式(54))$$
$$=\alpha_1 D_0^{\beta_1}\int_0^\infty \exp\left[-\left(r-\beta_1\delta+\frac{1}{2}\beta_1\beta'_1\sigma_D^2\right)t\right]dt \qquad (用 3.1 节式(31)')$$
$$=\alpha_1 D_0^{\beta}\int_0^\infty e^{-(r-m)t}dt=\frac{\alpha_1 D_0^{\beta}}{r-m},$$

这就检验了式(55)的确表达了问题(50)的值函数.

现在基于式(55)来分析参数的作用,集中考虑参数 δ 与 σ_D^2. 取定 $D=D_0>0$, 令 $V=V(D_0)$, 则由式(55)有

$$\ln V=-\ln\sigma_D^2-\ln(\mu_2-\beta_1)-\ln(\beta_1-\mu_1)+\ln(2\alpha_1 D_0^\beta)\triangleq W.$$

于是

$$\frac{\partial W}{\partial\delta}=\frac{1}{\beta_1-\mu_1}\frac{\partial\mu_1}{\partial\delta}-\frac{1}{\mu_2-\beta_1}\frac{\partial\mu_2}{\partial\delta}$$
$$=\left(\frac{1}{\beta_1-\mu_1}+\frac{1}{\mu_2-\beta_1}\right)\frac{\partial\mu_1}{\partial\delta}+\frac{2}{\sigma_D^2(\mu_2-\beta_1)}$$
$$=\frac{\mu_2-\mu_1}{(\beta_1-\mu_1)(\mu_2-\beta_1)}\cdot\frac{2\mu_1}{\sigma_D^2(\mu_2-\mu_1)}+\frac{2}{\sigma_D^2(\mu_2-\beta_1)}$$
$$=\frac{2\beta_1}{\sigma_D^2(\beta_1-\mu_1)(\mu_2-\beta_1)}>0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial\sigma_D^2}=-\frac{1}{\sigma_D^2}-\frac{1}{\mu_2-\beta_1}\frac{2\mu_2}{2\sigma_D^2}+\frac{1}{\beta_1-\mu_1}\frac{\partial\mu_1}{\partial\sigma_D^2}$$
$$=-\left(\frac{1}{\mu_2-\beta_1}+\frac{1}{\beta_1-\mu_1}\right)\frac{\partial\mu_2}{\partial\sigma_D^2}-\frac{1}{\sigma_D^2}+\frac{2\delta}{\sigma_D^4(\beta_1-\mu_1)}$$
$$=\frac{\mu_1-\mu_2}{(\mu_2-\beta_1)(\beta_1-\mu_1)}\cdot\frac{2\delta\mu_2-r}{\sigma_D^4(\mu_2-\mu_1)}+\frac{1-\beta_1-\mu_2}{\sigma_D^2(\beta_1-\mu_1)}$$

$$= -\frac{r + \beta_1\beta'_1\sigma_D^2}{\sigma_D^4(\mu_2 - \beta_1)(\beta_1 - \mu_1)}.$$

这就可得出以下结论：

命题 V 与 δ 正相关，即市场需求的预期上升，可提高投资者对其折现利润的预期. 若

$$0 < \beta < \beta_0 \triangleq \frac{\alpha'}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4r}{\sigma_D^2}}\right],$$

则 V 与 σ_D^2 负相关；若 $\beta > \beta_0$，则 V 与 σ_D^2 正相关. 这意味着，市场需求的随机冲击对投资折现利润的影响取决于需求 D 对于利润的权重 β，β 偏小与 β 偏大分别对应于需求冲击起负面作用与正面作用.

值得指出的是，与问题(42)不同，对于问题(50)的分析是完全严格的.

参考文献

[1] Abel A B, Bernanke B S. Macroeconomics[M]. 2nd ed. New York: Addison-Wesley, 1995.

[2] Abel A B. Optimal investment under uncertainty[J]. Amer. Eco. Rev., 1983, 73:228-233.

[3] Abel A B. A stochastic model of investment, marginal q and the marginal value of the firm[J]. Intern. Eco. Rev., 1985, 26:305-322.

[4] Abel A B, Eberly J C. A unified model of investment under uncertainty[J]. Amer. Eco. Rev., 1994, 34:1369-1384.

[5] Abel A B, Eberly J C. Optimal investment with costly reversibility[J]. Rev. Eco. Studies, 1996, 63:581-593.

[6] Abel A B, Eberly J C. An exact solution for the investment and value of a firm facing uncertainty, adjustment cost and irreversibility[J]. J. Eco. Dyn. Control, 1997, 21:831-852.

[7] Baxter M, Crucini M J. Explaining saving-investment correlations[J]. Amer. Eco. Rev., 1993, 83:416-436.

[8] Bernanke B S. Irreversibility, uncertainty and cyclical investment[J]. Q. J. Eco., 1983, 98:85-106.

[9] Caballero R J, Pindyck R S. Uncertainty, investment and industry evolution[J]. Intern. Eco. Rev., 1996, 37:641-662.

[10] Calcagnini G, Saltari E. Real and financial uncertainty and investment decisions[J]. J. Macroeco., 2000, 22:491-514.

[11] De Long J B, Summers L H. Equipment investment and economic growth[J]. Q. J. Eco., 1991, 106:445-502.

[12] Dixit A K. Irreversible investment with price ceilings[J]. J. Political Eco., 1991, 19:541-557.

[13] Dixit A K, Pindyck R S. Investment under Uncertainty[M]. Princeton: Princeton Univ. Press, 1994.

[14] Gertler M, Grinols E. Monetary randomness and investment[J]. J. Monetary Eco., 1982, 10:239-259.

[15] Glomm G, Ravikumar B. Public investment in infrastructure in a simple growth model[J]. J. Eco. Dyn. Control, 1994, 18:1173-1188.

[16] Gould J P. Adjustment costs in the theory of investment of the firm [J]. Rev. Eco. Studies, 1968, 35:47-55.

[17] Gramlich E M. Infrastructure investment: a review essay[J]. J. Eco. Literature, 1994, 32:1176-1196.

[18] Greewood J, Hercowtz Z, Huffman G W. Investment, capacity utilization and the real business cycle[J]. Amer. Eco. Rev., 1988, 78: 402-417.

[19] Guiso L, Parigi G. Investment and demand uncertainty[J]. Q. J. Eco., 1999, 114:185-227.

[20] Hayashi F. Tobin's marginal q and average q: a neoclassical interpretation[J]. Econometrica, 1982, 50:213-224.

[21] Hubbard G. Investment under uncertainty[J]. J. Eco. Literature, 1994, 32:1816-1831.

[22] Ingersoll J, Ross S A. Waiting to invest: investment and uncertainty [J]. J. Business, 1992, 65:1-29.

[23] Kataoka H, Kenichi Semba. The neoclassical investment model and a new conversion law[J]. J. Eco., 2002, 75:137-160.

[24] Leahy J V, Whited T M. The effect of uncertainty on investment: some stylized facts[J]. J. Money, Credit & Banking, 1996, 28:64-83.

[25] Lucas R E. Adjustment costs and the theory of supply[J]. J. Political Eco., 1967, 75:321-334.

[26] Luenberger D G. Investment Science[M]. Oxford: Oxford Uni. Press, 1997.

[27] Metcalf G E, Hassett K A. Investment under alternative return assumption[J]. J. Eco. Dyn. Control, 1995, 19:1471-1488.

[28] Modigliani F, Miller M H. The cost of capital, corporation finance and theory of investment[J]. Amer. Eco. Rev., 1958, 48:261-297.

[29] Osterberg W P. Tobin's q, investment and the endogenous adjustment of financial structure[J]. J. Publ. Eco., 1989, 40:293-318.

[30] Pindyck R S. Irreversible investment, capacity and the value of the firm [J]. Amer. Eco. Rev., 1988, 78:969-985.

[31] Pindyck R S. Irreversibility, uncertainty and investment[J]. J. Eco. Literature, 1991, 29:1110-1152.

[32] Tobin J. A general equilibrium approach to monetary theory[J]. J. Money, Credit & Banking, 1969, 1:15-29.

4.5 货币的介入

如被普遍认为的,货币在经济中作为财富存储、交易工具与核算单位而起作用,其重要性是不容置疑的. 描述货币的基本变量是货币存量①:名义存量 M 与实际量 M/P(P 表示价格水平). M 的确切范围与计算方法是应用经济学的问题,此处不作讨论. 我们感兴趣的基本问题是:变量 M(或 M/P)如何进入模型? 首先,M 以自然的方式出现在资本积累方程中:

$$dK + d(M/P) = s[Ydt + d(M/P)], \tag{1}$$

其中 s 是常数储蓄率. 对于跨时最优决策模型而言,M 进入模型的两种典型方式是:其一,通过"现金优先"约束体现货币的交易功能,这一方法首先由Clower于1967年提出,它依赖于明显地导入的交易方法,但似乎难以处理;其二,将货币直接引入效用函数,这一方法首先由Sidrauski(1967)提出. 货币因其交易功能而为个体带来福利,看来并无疑问. 但在完全不明显描述交易过程的情况下直接将货币放入效用函数,不免令人疑虑,因而招致批评. 直到Feenstra(1986)论证了在一定条件下上述的两种方法等价之后,对于货币进入效用函数的批评才缓和下来.

在本节中,变量 K,L 等保持通常的意义. 令 $k = K/L$,m 则依情况表示 M/P 或 $M/(LP)$. 关于 L,M,P 的如下方程用作基本假设:

① 货币存量(即货币供应)的明确界定与实际测定,是一个看法不一的复杂问题,非此处所能详细讨论(参看 Abel & Bernanke(1995)). 不过,这并不影响下面的理论分析.

$$\begin{cases} dL = L(ndt + du_L), & (2a) \\ dM = M(\phi dt + du_M), & (2b) \\ dP = P(\pi dt + du_P). & (2c) \end{cases}$$

自然，n,ϕ,π 分别是人口、货币与价格水平的期望增长率，π 就是期望通胀率. du_L,du_M 与 du_P 均为Brown 运动(不必是标准的!). 方程(2a)、方程(2c)是熟知的；方程(2b)意味着，货币管理当局保持货币的平均增长率为既定的 ϕ，但受诸多不可控制的因素的影响，且货币的扩张受到由 du_M 刻画的随机扰动的影响.

4.5.1 货币介入的Solow 模型

本章的讨论是从随机形式下的Solow 模型(4.1.1 小节)开始的，Solow 模型自然成为"货币介入"的第一个对象. 本小节所关注的问题是：货币介入之后，Solow 模型的基本结论(特别是有关稳定性的结论)将有哪些改变?

A. 模型描述

如同在4.1.1A 中一样，总产出 Y 取决于一个新古典生产函数：$Y = F(K, L)$；货币的介入并不直接影响生产过程，而只是影响货币积累. 在4.1.1 小节中，模型方程基于描述 K,L 增长的两个方程(4.1 节式(4a)与式(4b)). 而现在的出发点，则是描述 K,L,M,P 增长的四个方程：方程(1)与方程(2a)～方程(2c)，其中方程(1)是4.1 节式(4a)的一个修正，而方程(2a)则与4.1 节式(4b)一致. 如同在4.1.1 小节中一样，为便于分析，应以人均变量取代总体变量. 令 $k = K/L, m = M/(LP)$ (人均实际货币存量)，今利用方程(1)、方程(2)导出关于 (k,m) 的随机微分方程组，这一推导恰对应于从4.1 节式(4)导出4.1 节式(5)，其方法完全是标准的，关键技巧在于Itô公式的运用而已. 为简单起见，本小节中假定 du_L,du_M,du_P 互不相关.

首先利用3.1 节式(25)从方程组(2)得出

$$\begin{aligned} \frac{dm}{m} &= \frac{dM}{M} - \frac{dL}{L} - \frac{dP}{P} + \left(\frac{dL}{L}\right)^2 + \left(\frac{dP}{P}\right)^2 \\ &\quad - \frac{dM}{M}\frac{dL}{L} - \frac{dM}{M}\frac{dP}{P} + \frac{dL}{L}\frac{dP}{P} \\ &= (\phi - n - \pi + \sigma_L^2 + \sigma_P^2)dt - du_L + du_M - du_P. \end{aligned}$$

为导出关于 k 的方程，将方程(1)改写成

$$dK = sYdt - s'd(M/P), \tag{1$'$}$$

其中 $Y = F(K,L) = Lf(k), f(k) = F(k,1)$；

$$\begin{aligned} d\left(\frac{M}{P}\right) &= \frac{M}{P}\left(\frac{dM}{M} - \frac{dP}{P}\right)\left(1 - \frac{dP}{P}\right) \qquad (\text{用 3.1 节式(28b)}) \\ &= Lm[(\phi - \pi + \sigma_P^2)dt + du_M - du_P]. \end{aligned}$$

于是

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}k &= k\left(\frac{\mathrm{d}K}{K}-\frac{\mathrm{d}L}{L}\right)\left(1-\frac{\mathrm{d}L}{L}\right) \qquad \text{(用 3.1 节式(28b))}\\
&= k\left[\frac{sY}{K}\mathrm{d}t-\frac{s'}{K}\mathrm{d}\left(\frac{M}{P}\right)-\frac{\mathrm{d}L}{L}\right]\left(1-\frac{\mathrm{d}L}{L}\right)\\
&= k\left[\frac{sf(k)}{k}\mathrm{d}t-\frac{s'm}{k}(\phi-\pi+\sigma_P^2)\mathrm{d}t-\frac{s'm}{k}(\mathrm{d}u_M-\mathrm{d}u_P)-\frac{\mathrm{d}L}{L}\right]\left(1-\frac{\mathrm{d}L}{L}\right)\\
&= [sf(k)+k(\sigma_L^2-n)+ms'(\pi-\phi-\sigma_P^2)]\mathrm{d}t\\
&\quad -k\mathrm{d}u_L-ms'(\mathrm{d}u_M-\mathrm{d}u_P).
\end{aligned}
$$

这就得到关于 (k,m) 的SDE 系统：

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}k=[sf(k)+\alpha k+\beta m]\mathrm{d}t+\mathrm{d}v, & \text{(3a)}\\
\mathrm{d}m=m(\gamma\mathrm{d}t+\mathrm{d}w), & \text{(3b)}
\end{cases}
$$

其中

$$
\begin{cases}
\alpha=\sigma_L^2-n,\quad \beta=s'(\pi-\phi-\sigma_P^2),\\
\gamma=\phi-n-\pi+\sigma_L^2+\sigma_P^2,\\
\mathrm{d}v=-k\mathrm{d}u_L-ms'(\mathrm{d}u_M-\mathrm{d}u_P),\\
\mathrm{d}w=-\mathrm{d}u_L+\mathrm{d}u_M-\mathrm{d}u_P.
\end{cases} \tag{4}
$$

若扰动消失，则方程组(3)退化为

$$
\begin{cases}
\dot{k}=sf(k)-nk+ms'(\pi-\phi),\\
\dot{m}=m(\phi-n-\pi).
\end{cases} \tag{3$'$}
$$

方程组(3)′可看作货币介入的确定性Solow 模型的微分方程组.

B. 模型分析

首先考虑方程组(3)′，它有两个均衡点(0,0)与 $(k^*,0)$，其中 $k^*>0$（假定 $n>0$）. 方程组(3)′的Jacobi 矩阵为

$$
\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} sf'(k)-n & * \\ 0 & \phi-n-\pi \end{bmatrix},
$$

其特征值为 $\lambda_1=sf'(k)-n, \lambda_2=\phi-n-\pi$. 为便于分析，下面设 $\pi<\phi<n+\pi$，于是 $\lambda_2<0$. 通过标准的微积分方法可推出 $sf'(k^*)-n<0$，而 $f'(0)=\infty$（依4.1节式(1)）. 可见点(0,0)与 $(k^*,0)$ 分别为鞍点与吸点. 用ODE 理论中熟知的方法可以得出结论：系统(3)′的任何起于第一象限的轨道最终将进入均衡点 $(k^*,0)$（参见图4.1）. 直观上这意味着，只要在起点处 $k_0>0, m_0>0$，在长期内人均资本存量 k 将收敛于均

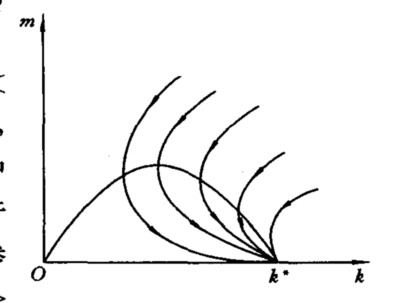


图4.1

衡水平 k^*，而人均实际货币存量 m 则将渐近于零. 在极限状态下，货币将退出市场.

现在转向考虑SDE(3). 与方程组(3)′的明显差别是，方程组(3)并无非零均衡点，因此上面对方程组(3)′所得出的结论不再保持. 至于方程组(3)的零解的稳定性，可用3.2.3B所述的Liapunov函数法进行分析，但所涉及的讨论并不简单. 对于方程组(3)可从另一思路考虑，关键之点是注意到方程(3b)实际上独立于方程(3a)，而且是一个齐次线性SDE，因而可以单独解出 $m(t)$（用3.2节式(20)′）：

$$m(t) = m_0 \exp[(\gamma - \sigma_w^2/2)t + w(t)], \quad m_0 = m(0). \tag{5}$$

由式(5)表出的 $m(t)$ 是一个几何Brown运动，它在 $t \to \infty$ 时的渐近性质十分简单且完全取决于

$$\mu \triangleq \gamma - \frac{\sigma_w^2}{2} = \phi - n - \pi + \frac{1}{2}(\sigma_L^2 + \sigma_P^2 - \sigma_M^2), \tag{6}$$

当 $\mu > 0$ 时，$m(t)$ 几乎必然指数增长；当 $\mu < 0$ 时，$m(t)$ 几乎必然指数衰减于零. 因已经假定 $\lambda_2 = \phi - n - \pi < 0$，故当 $\sigma_L^2 + \sigma_P^2$ 足够小时 $m(t)$ 几乎必然指数衰减于零. 但当 $\sigma_L^2 + \sigma_P^2 - \sigma_M^2$ 充分大时，$m(t)$ 的渐近状态将急剧变化. 由此可见，Solow经济的稳定性可能因随机扰动的作用而被剧烈破坏.

鉴于方程(3a)是非线性的且包含变量 m，对变量 k 的分析远不如对 m 那么容易. 但亦可作某些初步的讨论. 将方程(3a)改写成

$$\mathrm{d}k = \alpha k \mathrm{d}t + [sf(k) + \beta m]\mathrm{d}t + \mathrm{d}v;$$

由此解出（用3.2节式(22)）

$$k(t) = k_0 e^{\alpha t} + \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)}\{[sf(k(\tau)) + \beta m(\tau)]\mathrm{d}\tau + \mathrm{d}v(\tau)\},$$

其中 $k_0 = k(0)$. 令 $\varphi(t) = \mathrm{E}_0[k(t)e^{-\alpha t}]$，则

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= k_0 + \beta\int_0^t e^{-\alpha\tau}\mathrm{E}_0[m(\tau)]\mathrm{d}\tau + s\int_0^t e^{-\alpha\tau}\mathrm{E}_0[f(k(\tau))]\mathrm{d}\tau \\
&= k_0 + \beta m_0\int_0^t \mathrm{E}_0 e^{(\mu-\alpha)\tau + w(\tau)}\mathrm{d}\tau + s\int_0^t e^{-\alpha\tau}\mathrm{E}_0[f(k(\tau))]\mathrm{d}\tau \quad \text{（用式(5)）} \\
&= k_0 + \beta m_0\int_0^t e^{(\gamma-\alpha)\tau}\mathrm{d}\tau + s\int_0^t e^{-\alpha\tau}\mathrm{E}_0[f(k(\tau))]\mathrm{d}\tau \\
&= k_0 + \frac{\beta m_0[e^{(\gamma-\alpha)t} - 1]}{\gamma - \alpha} + s\int_0^t e^{-\alpha\tau}\mathrm{E}_0[f(k(\tau))]\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

特别取 $f(k) = Ak^\theta, 0 < \theta < 1$，利用不等式 $k^\theta \leqslant 1 + k (k \geqslant 0)$，得

$$\varphi(t) \leqslant k_0 + \frac{\beta m_0[e^{(\gamma-\alpha)t} - 1]}{\gamma - \alpha} + \frac{As(1 - e^{-\alpha t})}{\alpha} + As\int_0^t \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{7}$$

为从式(7)右端消去 $\varphi(t)$，需用到如下标准积分不等式结论：

$$\varphi(t) \leqslant \psi(t) + c\int_0^t \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau \Rightarrow \varphi(t) \leqslant \psi(t) + c\int_0^t \mathrm{e}^{c(t-\tau)}\psi(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{8}$$

将式(8)用于式(7)原则上并无困难，但计算颇为繁琐，并无必要写出其细节，仅将结果表出如下：

$$\mathrm{E}_0 k(t) \leqslant -\frac{As}{\alpha + As} + \frac{\beta m_0}{\gamma - \alpha - As}\mathrm{e}^{\gamma t} + \left(k_0 + \frac{As}{\alpha + As} + \frac{\beta m_0}{\alpha + As - \gamma}\right)\mathrm{e}^{(\alpha + As)t}. \tag{9}$$

估计式(9)未必很精确，但不失为有用. 注意已假设 $\phi - n - \pi < 0$，故由式(4)知当 $\sigma_L^2 + \sigma_P^2$ 充分小时 $\gamma \leqslant 0$. 另一方面，

$$\alpha + As = As + \sigma_L^2 - n,$$

当 s 与 σ_L^2 充分小时，式(9)表明 $\mathrm{E}_0 k(t)$ 的增长是较受限制的.

4.5.2　货币进入效用函数

货币可依多种形式进入效用函数，因而导致多种不同的模型. 下面考虑的模型接近于Grinols 和Turnovsky(1992)的工作，但兼顾了4.2.3 小节中的设定，因而更具综合性.

A. 模型与最优性条件

设公共开支与货币均进入效用函数，这意味着个体决策者的目标函数为

$$V = \mathrm{E}_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}U(c(t)G^\theta(t)m^{\theta_1}(t))\mathrm{d}t,$$

其中 $U(\cdot)$ 是参数为 $\sigma > 1$ 的CRRA 效用函数，G 与 m 分别为福利性公共开支与实际货币存量，$\theta, \theta_1 \geqslant 0$. 不考虑外部性与人口增长，因而可设 $L = 1, G = gk$ (相当于在4.2 节式(28)中取 $\delta = 1$)，$m = M/P$.

个体的资产 w 由三部分组成：$w = k + m + b$，其中 $m = M/P, b = B/P$，M 与 B 分别为个体所持有的货币与债券的名义量. 资产 k, m, b 的份额分别为 $n_1, n_2, n_3, n_1 + n_2 + n_3 = 1$. 个体预算约束方程在4.2 节式(29)的基础上修改为

$$\mathrm{d}w = \mathrm{d}y + m\mathrm{d}R_m + b\mathrm{d}R_b - \mathrm{d}c - \mathrm{d}T, \tag{10}$$

其中 $\mathrm{d}y, \mathrm{d}c$ 保持4.2.3 小节中的意义；税收 $\mathrm{d}T$ 遵循如下规则：

$$\mathrm{d}T = w(\tau\mathrm{d}t + \mathrm{d}u_T), \tag{11}$$

税率 τ 与税收冲击 $\mathrm{d}u_T$ 都将由模型内生地决定. 关键的问题是确定资产 m, b 的随机回报率 $\mathrm{d}R_m, \mathrm{d}R_b$. 因货币的名义回报率为零，在个体持有货币不变的条件下有 $\mathrm{d}M = 0$ (注意此处 M 不应看作总体变量)，因而依式(2c)及3.2 节式(25b)有

$$\mathrm{d}R_m = (\sigma_P^2 - \pi)\mathrm{d}t - \mathrm{d}u_P.$$

其次，设政府债券有非随机的名义利率 i，则用3.2 节式(25b)同样导出

$$dR_b = r_b dt - du_P, \quad r_b = i - \pi + \sigma_P^2.$$

将以上结果代入式(10)得到

$$dw = (\eta w - c)dt + w du,$$

其中

$$\begin{cases} \eta = An_1 + n_2(\sigma_P^2 - \pi) + n_3 r_b - \tau, & (12a) \\ du = An_1 du_Y - n'_1 du_P - du_T. & (12b) \end{cases}$$

这样,个体最优决策问题可表为

$$\begin{cases} \max_{c,n_1,n_2} E_0 \int_0^\infty e^{-\rho t} U(c(t)G^\theta(t)m^{\theta_1}(t))dt, & (13a) \\ \text{s.t.}\ dw = (\eta w - c)dt + w du, \quad w(0) = w_0. & (13b) \end{cases}$$

注意,在形式上方程(13b)与4.2节式(32b)并无不同.

因问题(13)不涉及外部性且是自治的,故最优性条件可表为

$$\begin{cases} \rho V = U + (\eta w - c)V_w + \frac{1}{2}\sigma_u^2 w^2 V_{ww}, & (14a) \\ 0 = U' G^\theta m^{\theta_1} - V_w, & (14b) \\ \left(\frac{\theta\mu}{n_1} + A - r_b\right)V_w + \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma_u^2}{\partial n_1} w V_{ww} = 0, & (14c) \\ \left(\frac{\theta_1\mu}{n_2} - i\right)V_w + \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma_u^2}{\partial n_2} w V_{ww} = 0, & (14d) \end{cases}$$

其中已置 $c = \mu w$, 且式(14c)与式(14d)已用 $U' G^\theta m^{\theta_1} = V_w$ (依式(14b))化简.

由式(12b)有

$$\sigma_u^2 = A^2 n_1^2 \sigma_Y^2 + n'^2_1 \sigma_P^2 + \sigma_T^2 - 2An_1 n'_1 \sigma_{PY} - 2An_1 \sigma_{TY} + 2n'_1 \sigma_{PT},$$

于是

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma_u^2}{\partial n_1} = A^2 n_1 \sigma_Y^2 - n'_1 \sigma_P^2 - A(1 - 2n_1)\sigma_{PY} - A\sigma_{TY} - \sigma_{PT}, & (15a) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma_u^2}{\partial n_2} = 0. & (15b) \end{cases}$$

B. 宏观均衡

类似于4.2.3B中的做法,设在宏观均衡时 μ, n_1, n_2 均为常数, $V = aU(w^{\theta_2})$, 其中 $\theta_2 = \theta + \theta_1 + 1$, 参数 a 满足条件

$$a\theta_2 = \mu^{-\sigma}(gn_1)^{\theta\sigma} n_2^{\theta_1\sigma}. \qquad \text{(用式(14b))} \qquad (16)$$

其次,类似于4.2节式(38),设定宏观均衡条件为

$$\frac{dw}{w} = \frac{dk}{k} = \frac{dm}{m} = \frac{db}{b}. \qquad (17)$$

为将条件(17)具体化,需求出 dk, dm, db (或至少其中两个)的表达式. 首先,将3.1节式(28b)用于 $dm = d(M/P)$ 得

$$\mathrm{d}m = m(\psi_m \mathrm{d}t + \mathrm{d}u_M - \mathrm{d}u_P), \quad \psi_m = \phi - \pi + \sigma_P^2 - \sigma_{MP}. \tag{18}$$

其次,对 $\mathrm{d}k$ 仍用 4.2 节式(38a),即 $\mathrm{d}k = \mathrm{d}y - \mathrm{d}c - \mathrm{d}G$,$\mathrm{d}G$ 依 4.2 节式(37),于是

$$\mathrm{d}k = (y - c - gk)\mathrm{d}t + y(\mathrm{d}u_Y - \mathrm{d}u_G). \tag{19}$$

结合式(13b)与式(17)~式(19)得到

$$\begin{aligned}(\eta - \mu)\mathrm{d}t + \mathrm{d}u &= (A - g - \mu/n_1)\mathrm{d}t + A(\mathrm{d}u_Y - \mathrm{d}u_G) \\ &= \psi_m \mathrm{d}t + \mathrm{d}u_M - \mathrm{d}u_P,\end{aligned}$$

这相当于

$$\begin{cases} \eta - \mu = A - g - \mu/n_1 = \phi - \pi + \sigma_P^2 - \sigma_{MP}, & (20\mathrm{a}) \\ \mathrm{d}u = A(\mathrm{d}u_Y - \mathrm{d}u_G) = \mathrm{d}u_M - \mathrm{d}u_P. & (20\mathrm{b}) \end{cases}$$

假定 $\mathrm{d}u_G,\mathrm{d}u_M,\mathrm{d}u_Y$ 是互不相关的外生 Brown 运动. 由式(20b)解出

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}u_P = A(\mathrm{d}u_G - \mathrm{d}u_Y) + \mathrm{d}u_M, \\ &\mathrm{d}u_T = An_1\mathrm{d}u_G - n'_1\mathrm{d}u_M. \qquad (\text{用式(12b)})\end{aligned}$$

由此得出

$$\begin{cases} \sigma_P^2 = \sigma_u^2 + \sigma_M^2, \quad \sigma_u^2 = A^2\sigma_0^2, \quad \sigma_0^2 = \sigma_G^2 + \sigma_Y^2, \quad \sigma_{MP} = \sigma_M^2; \\ \sigma_{PY} = -A\sigma_Y^2, \quad \sigma_{PT} = A^2 n_1 \sigma_G^2 - n'_1\sigma_M^2, \quad \sigma_{TY} = 0. \end{cases} \tag{21}$$

将以上结果代入式(15a)得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \sigma_u^2}{\partial n_1} = -A^2\sigma_G^2. \tag{15a$'$}$$

为简化公式,沿用前几节的作法,设定若干复合参数:

$$\begin{cases} q = 1 - \theta_2\sigma', \quad \alpha = \dfrac{\rho}{\theta_2} + \dfrac{A^2 q\,\sigma'\sigma_0^2}{2}, \quad \sigma_0^2 = \sigma_G^2 + \sigma_Y^2, \\ \beta = \alpha - \sigma'(A - g). \end{cases} \tag{22}$$

利用记号 q,如通常一样可验证(对照 4.2 节式(42))

$$wV_{ww} = -qV_w, \quad wV_w = \theta_2\sigma' V.$$

将此结果及式(15a)$'$、式(15b)、式(16)代入最优性条件(14),得到

$$\begin{cases} \sigma\mu = \alpha - \eta\sigma', & (14\mathrm{a})' \\ \theta\mu = n_1(r_b - A - A^2 q\,\sigma_G^2), & (14\mathrm{c})' \\ \theta_1\mu = in_2. & (14\mathrm{d})' \end{cases}$$

现在让我们总结一下. 结合最优性条件(14)与宏观均衡条件(17),一共得到 5 个独立等式:式(20a)(它含两个等式)与式(14a)$'$~式(14d)$'$. 这就可用来决定 5 个均衡值,即 μ,n_1,n_2 及 π,τ;而 A,g,i,ϕ,σ_M^2 等则应看作外生参数.

作了以上准备之后,求出所有均衡值原则上已无困难. 但为简化计算,仍应选定适当的求解顺序. 下面采用的方法是,首先求出用 μ 与外生参数表出 n_1,n_2,π,τ 等的式子,然后求出 μ.

首先，由式(14d)′已有 $n_2 = \theta_1\mu/i$；由式(14a)′有 $\eta\sigma' = \alpha - \sigma\mu$. 其次，由式(20a)解出

$$n_1 = \frac{\mu}{A - g - \eta + \mu} = \frac{\mu\sigma'}{\mu - \beta}, \qquad (\beta \text{依式(22)}) \qquad (23)$$

$$\pi = \sigma_P^2 - \sigma_{MP} + \phi + \mu - \eta = A^2\sigma_0^2 + \phi + \frac{\mu - \alpha}{\sigma'}. \qquad (\alpha \text{依式(22)}) \qquad (24)$$

由式(20a)同时得到均衡增长率：

$$\psi \triangleq \eta - \mu = (\alpha - \mu)/\sigma'. \qquad (25)$$

此外，由式(12a)及式(14a)′、式(14d)′、式(23)、式(24)得出

$$\begin{aligned} \tau &= An_1 + n_2(\sigma_P^2 - \pi) + n_3 r_b - \eta \\ &= n_1(A - r_b) + r_b - n_2 i - \eta \\ &= \frac{\beta\sigma'(g + \phi - i - \sigma_M^2)}{\mu - \beta} - \theta_1\mu + g\sigma' + \sigma(i + \phi + \sigma_M^2). \end{aligned} \qquad (26)$$

最后余下确定 μ，这基于尚未用到的方程(14c)′：将式(23)、式(24)代入式(14c)′，得到一个关于 μ 的方程，由其解出

$$\mu = \alpha + \frac{\sigma'}{\bar\theta}(g\theta + i - A\bar\theta - \phi + \sigma_M^2 - A^2 q\sigma_G^2). \qquad (27)$$

这就完成了全部均衡值的计算. 值得注意的是，主要的均衡值 ψ, n_1, n_2 只是通过 μ 才与 ϕ, σ_M^2 发生关系. 在这个意义上可以说，货币政策(它体现于参数 ϕ, σ_M^2)部分地具有中立性.

自然要求 $\mu > 0$. 在此条件下，用3.3.3C 中的方法可验知值函数设定正确，且横截性条件满足. 其次，通常也要求 $n_1, n_2 > 0, n_3 \geqslant 0$ (后者相当于 $n_1 + n_2 \leqslant 1$，注意 $n_3 < 0$ 未必不具现实性). 依式(14d)′、式(23)与式(27)，上述要求均可表为关于外生参数的一定不等式，这些都不拟详述. 下面只是假定所有提到的要求均已满足，以便于进一步的讨论. 需要指出的是，与 $\mu, n_1, n_2 > 0$ 相适应，自然应假定 $i > 0$ (依式(14d)′)，$\beta > \mu > 0$. 下面就要用到这些结论.

C. 参数的作用

最值得关注的参数，无疑是 ϕ, σ_M^2 与 g, σ_G^2，它们分别表达了政府的货币政策与财政政策.

首先依次计算相关导数如下：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\alpha}{\partial\phi} = \frac{\partial\alpha}{\partial\sigma_M^2} = \frac{\partial\alpha}{\partial g} = 0, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial\sigma_G^2} = \frac{A^2 q\sigma'}{2}; \qquad (\alpha \text{依式(22)}) \\ &-\frac{\partial\mu}{\partial\phi} = \frac{\sigma'}{\bar\theta} = \frac{\partial\mu}{\partial\sigma_M^2}, \quad \frac{\partial\mu}{\partial g} = \frac{\theta\sigma'}{\bar\theta}, \\ &\frac{\partial\mu}{\partial\sigma_G^2} = \frac{A^2 q\theta\sigma'}{2\bar\theta}; \qquad (\text{用式(27)}) \\ &\frac{\partial n_2}{\partial s} = \frac{\theta_1}{i}\frac{\partial\mu}{\partial s}, \quad s = \phi, \sigma_M^2, g, \sigma_G^2; \end{aligned} \qquad (28)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial n_1}{\partial \phi}=\dfrac{\beta}{\delta}=-\dfrac{\partial n_1}{\partial \sigma_M^2}, & \dfrac{\partial n_1}{\partial g}=\dfrac{\overline{\theta}\mu-\beta\theta}{\delta},\\ \dfrac{\partial n_1}{\partial \sigma_G^2}=\dfrac{A^2q(\overline{\theta}\mu-\beta\,\theta)}{2\delta}, & \delta=\dfrac{\overline{\theta}(\mu-\beta)^2}{\sigma'^2};\end{cases} \quad \text{(用式(23)、式(28))}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \phi}=\frac{\partial \pi}{\partial g}=\frac{\theta}{\overline{\theta}},\quad \frac{\partial \pi}{\partial \sigma_M^2}=\frac{1}{\overline{\theta}},\quad \frac{\partial \pi}{\partial \sigma_G^2}=A^2\left(1-\frac{q}{2\overline{\theta}}\right);\ \text{(用式(24)、式(28))}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \phi}=\frac{1}{\overline{\theta}}=-\frac{\partial \psi}{\partial \sigma_M^2},\quad \frac{\partial \psi}{\partial g}=-\frac{\theta}{\overline{\theta}},\quad \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_G^2}=\frac{A^2q}{2\overline{\theta}}. \quad \text{(用式(25)、式(28))}$$

为确定起见，设 $\theta,\theta_1>0$.

综合以上事实有如下结论.

(i) ϕ 的作用. μ,n_1,n_2,π,ψ 均与 ϕ 正相关. 这意味着，若货币可期望地加速扩张，则居民将投资更多并持有更多的货币，消费财富比与期望通胀率均上升，平均经济增长率提高.

(ii) σ_M^2 作用. π 与 σ_M^2 正相关，而 μ,n_1,n_2,ψ 均与 σ_M^2 负相关. 这表明，货币供应的随机冲击除了抬高期望通胀率之外，对于居民的资产构成比 n_1 与 n_2、消费财富比及平均经济增长率等主要经济指标均有抑制作用. 值得注意的是，货币扩张的可预期部分与随机冲击部分有很不同的后果.

(iii) g 的作用. μ,n_2,ψ 与 g 负相关，π 与 g 正相关. 这意味着，若政府常规性地扩大公共开支，则居民将降低消费财富比，减少持有货币份额，其结果是平均经济增长率下降，而期望通胀率上升. 如此看来，尽管公共开支进入效用函数，但似乎还是起负面作用. 至于 g 对 n_1 的作用，则一般是不确定的.

(iv) σ_G^2 的作用. σ_G^2 对 μ,n_2 的作用与 g 类似. 但与 g 不同，σ_G^2 对 ψ 肯定地有正相关作用.

D. 福利分析

如同在 4.2.3C 中一样，令 $V=V(w_0)$. 由 $w_0=k_0/n_1$ 与式(16)得出

$$\sigma' V=\frac{g^{\theta\sigma'}n_2^{\theta_1\sigma'}k_0^{\theta_2\sigma'}}{\theta_2\mu^{\sigma}n_1^{\overline{\theta}_1\sigma'}}.$$

于是

$$-\ln(\sigma' V)=\sigma\ln\mu+\overline{\theta}_1\sigma'\ln n_1-\theta_1\sigma'\ln n_2-\theta\,\sigma'\ln g+\ln(\theta_2 k_0^{-\theta_2\sigma'})\triangleq Q,$$

因而

$$\frac{\partial Q}{\partial s}=\begin{cases}\dfrac{1-\overline{\theta}_1\sigma'}{\mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial s}+\dfrac{\overline{\theta}_1\sigma'}{n_1}\dfrac{\partial n_1}{\partial s}, & s=\phi,\sigma_M^2,\sigma_G^2;\\ \dfrac{1-\overline{\theta}_1\sigma'}{\mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial g}+\dfrac{\overline{\theta}_1\sigma'}{n_1}\dfrac{\partial n_1}{\partial g}-\dfrac{\theta\,\sigma'}{g}, & s=g.\end{cases} \tag{29}$$

利用上段已得的导数公式，依次得出

$$\frac{\partial Q}{\partial \phi}=\frac{\sigma'(\overline{\theta}_1 n_1-1)}{\overline{\theta}\mu},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_M^2} = \frac{\mu\sigma'(1-\bar{\theta}_1\sigma') - \beta\sigma'}{\bar{\theta}\mu(\mu-\beta)},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial g} = \sigma'\left(\frac{\theta+\bar{\theta}_1 n_1}{\bar{\theta}\mu} - \frac{\theta}{g}\right),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_G^2} = \frac{A^2 q\sigma'}{2\bar{\theta}\mu(\mu-\beta)}[\mu(\theta+\bar{\theta}_1\sigma') - \beta\theta].$$

由这些结果看出，除了公共开支冲击（即 σ_G^2）肯定对福利有负的影响之外，ϕ, g，σ_M^2 对于福利的影响都不完全确定. 不过，还是容易作一些简单的讨论.

(i) 因当 $\theta_1 = 0$ 时显然有 $\partial Q/\partial\phi > 0$，故当 θ_1 充分小（即货币的福利效应不显著）时，Q 与 ϕ 正相关，因而可预期的货币扩张有利于福利. 但随着 θ_1 的增大，上述结论可能变成相反. 这就得出一个初看起来颇为惊人的结论：个体过于看重手中的货币有损于货币扩张的福利影响！

(ii) 因当 $\theta = 0$ 时有 $\partial Q/\partial g < 0$，故当 θ 充分小（即公共开支的福利效应不明显）时，Q 与 g 负相关，因而可预期的公共开支扩张有损于福利. 当 θ 增大时是否会出现相反的结论，情况仍不明显.

(iii) 因当 $\sigma \approx 1$ 时，$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_M^2} \approx \frac{\sigma'}{\bar{\theta}\mu} < 0$，故当 σ 充分接近于1时 Q 与 σ_M^2 负相关，因而货币供应的随机冲击有损于福利. 若 σ 充分大，则结论可能变得相反.

参 考 文 献

[1] Abel A B. Optimal monetary growth[J]. J. Monetary Eco., 1987, 19: 437-450.

[2] Abel A B, Bernanke B S. Macroeconomics[M]. 2nd ed. New York: Addison-Wesley, 1995.

[3] Bakshi G S, Chen Z. The spirit of capitalism and stock-market prices [J]. Amer. Eco. Rev., 1996, 86:133-157.

[4] Ball L, Romer D. Real rigidities and non-neutrality of money[J]. Rev. Eco. Studies, 1990, 57:183-203.

[5] Barro R J. Reputation in a model of monetary policy with incomplete information[J]. J. Monetary Eco., 1986, 17:3-20.

[6] Barro R J, Gordon D B. A positive theory of monetary policy in a natural rate model[J]. J. Political Eco., 1983, 91:589-610.

[7] Bernanke B S, Blinder A S. Credit, money and aggregate demand[J]. Amer. Eco. Rev., 1988, 78:435-439.

[8] Caplin A S, Leahy J. State-dependent pricing and the dynamics of

money and output[J]. Q. J. Eco., 1991, 106:683-708.

[9] Caplin A S, Spulber D F. Menu costs and the neutrality of money[J]. Q. J. Eco., 1987, 102:703-725.

[10] Chan L K C. Uncertainty and the neutrality of government financing policy[J]. J. Monetary Eco., 1983, 11:435-445.

[11] Clower R W. A reconsideration of the microeconomic foundations of monetary theory[J]. Western Eco. J., 1967, 6:1-8.

[12] Espinosa-Vega M A, Chong K. Fiscal and monetary policy interactions in an endogenous growth model with financial intermediaries[J]. Intern. Eco. Rev., 1999, 40:595-615.

[13] Feenstra R. Functional equivalence between liquidity costs and the utility of money[J]. J. Monetary Eco., 1986, 17:271-291.

[14] Friedman M. The role of monetary policy[J]. Amer. Eco. Rev., 1968, 58:1-17.

[15] Friedman M. Government revenue from inflation[J]. J. Political Eco., 1971, 79:846-856.

[16] Gertler M, Gilchrist S. Monetary policy, business cycles and the behavior of small manufacturing firms[J]. Q. J. Eco., 1994, 109:309-340.

[17] Gertler M, Grinols E. Monetary randomness and investment[J]. J. Monetary Eco., 1982, 10:239-258.

[18] Grinols E L, Turnovsky S J. Risk, financial market and macroeconomic equilibrium[J]. J. Eco. Dyn. Control, 1993, 17:1-36.

[19] Grinols E L, Turnovsky S J. Risk, optimal government finance monetary policies in a growing economy[J]. Economica, 1998, 65:401-427.

[20] Grinols E L, Turnovsky S J. Consequences of debt policy in a stochastically growing monetary economy[J]. Intern. Eco. Rev., 1998, 39:495-521.

[21] Mankiw N G, Summers L H. Money demand and the effects of fiscal policies[J]. J. Money, Credit & Banking, 1986, 18:415-429.

[22] Rotemberg J J. A monetary equilibrium model with transactions costs [J]. J. Political Eco., 1984, 92:41-58.

[23] Sidrauski M. Rational choice and patterns of growth in a monetary economy[J]. Amer. Eco. Rev., 1967, 57:534-544.

[24] Stockman A C. Auticipated inflation and the capital stock in cash-in-advance economy[J]. J. Monetary Eco., 1981, 8:387-393.
[25] Summers L H. How should long-term monetary policy be determined [J]. J. Money Credit & Banking, 1991, 23:625-631.
[26] Tobin J. Money and economic growth[J]. Econometrica, 1995, 33:671-684.
[27] Tobin J. A general equilibrium approach to monetary theory[J]. J. Money Credit & Banking, 1969, 1:15-29.
[28] Turnovsky S J. Monetary growth, inflation and economic activity in a dynamic macro model[J]. Intern. Eco. Rev., 1987, 28:707-730.
[29] Weiss L. The effects of money supply on economic welfare in steady state[J]. Econometrica, 1980, 48:565-576.
[30] Yoi chi Goken. Alternative government financing and stochastic endogenous growth[J]. J. Eco. Dyn. Control, 2002, 26:681-706.

4.6 小型开放经济

本书迄今所考虑的模型,都是为封闭经济体而设的,因而不能用来解释经济资源的跨国流动.这一局限当然无法令人满意.但一旦将探索之旅延伸至国界之外,我们就会面对一个高度复杂的世界,致使迄今非常有效的分析方法难以为用.因而在起步之际,我们不得不大大降低目标:不是立即着手分析世界各国之间错综复杂的经济关系,而是仅仅专注于一个小型开放经济,该经济体与看作浑然一体的外部世界发生交换关系.在如此高度简化的框架之内,我们得以顺利移用业已熟悉的随机最优化方法,建立起所需的模型.这样的模型就其基本特征而言,与4.2节～4.5节中已讨论过的模型并无重大差别,只是因涉及更多的因素而不免具有更大的复杂性.而且,因国际交易必然联系着货币换算,我们所考虑的经济必定是货币经济,这就使得4.5节中所用到的那些概念与方法将继续发挥作用.

4.6.1 模型与最优性条件

下面考虑的模型大体上接近于4.5.2小节中所建立的模型,主要的区别是:现在消费者可同时持有国内与国外资产;而资产的跨国界流动改变了国内市场的平衡条件.鉴于涉及的变量增多,致使模型显著地复杂化,我们将通过一个稍细的分析理出较明晰的头绪.

A. 市场框架

给定一个小型开放经济体，下面称之为本国或国内；与之相对的是该经济体之外的整个外部世界，下面简称为外国或国外. 外部世界必定丰富多彩，无法归于一统. 但一个简化的模型只能置此现实于不顾，将外国抽象化为一个统一体：它有单一的货币(下面称之为外币)与价格，且作为一个整体与“本国”发生关系. 如此高度的简化当然是为了便于分析. 在简化后的模型中，本国与外国似乎处于某种对等关系中，货币、价格等经济变量均内外互成对应. 但与“外国”相比，“本国”很小，以至对国外市场毫无影响力，这就使得形成于国外市场(即世界市场)的那些经济量(如国外价格)，对于本国来说总是外生的，除了被动接受之外别无选择. 就此而言，本国与外国终究处于一种不对称的关系中.

本国与外国之间存在着物质与金融产品的流动. 下面对这种流动作一些简化的限定. 首先，假定仅有一种物质产品(可理解为复合产品)跨国流动，其国内、外价格分别为 P 与 Q，二者分别依本币与外币计量. 以 E 记**名义汇率**，即一单位外币能兑换到的本币值. 注意 E 上升意味着本币贬值. 在自由贸易条件下，价格 P,Q,E 必定满足如下**购买力平价**(purchasing power parity，缩写为PPP)条件：

$$P = EQ. \tag{1}$$

假定 P,Q,E 的变化遵循以下随机增长规则：

$$\begin{cases} dP = P(\pi dt + du_P), & (2a) \\ dQ = Q(q dt + du_Q), & (2b) \\ dE = E(\varepsilon dt + du_E). & (2c) \end{cases}$$

π,q,ε 分别为本国期望通胀率、外国期望通胀率与本币汇价的期望折损率. 利用式(1)、式(2)及3.2.1D中的公式，易得

$$\begin{cases} \pi = \varepsilon + q + \sigma_{EQ}, & (3a) \\ du_P = du_E + du_Q. & (3b) \end{cases}$$

假定 q, du_Q 是外生的，$\pi,\varepsilon,du_P,du_E$ 则应由模型内生地决定.

设本国与外国都发行政府债券，二者均是无风险的短期债券，因而有确定的名义利率，分别记为 i 与 i^*. 本国居民可自由地购买国内、外政府债券，但本国债券却不在国外发行. 本国政府的货币与财政政策必然是模型关注的重点之一. 设 M 与 G 分别为本国货币存量与公共开支. 在随机环境中，政府并不能随心所欲地决定货币与公共开支的扩张，M 与 G 必须遵循某种随机增长规则：

$$\begin{cases} dM = M(\phi dt + du_M), & (4a) \\ dG = Y(g dt + du_G), \quad Y = AK, & (4b) \end{cases}$$

此处 ϕ,g,du_M,du_G 均是外生的.

B. 个体决策问题

为构成开放条件下代表性消费者的最优决策问题，关键在于适当地表述个

体的预算约束条件. 今考虑一个本国的代表性个体，他的财富 w 由四部分组成(均依实际量计算)：物质资本 k，货币持有量 $m(=M/P)$，本国债券持有量 $b(=B/P)$ 与外国债券持有量 $b^*(=B^*/Q)$，其中 M,B,B^* 是相应的名义量(此处不应看作整体变量！). 设这四种资产的份额依次为 $n_1,n_2,n_3,n_4,n_1+n_2+n_3+n_4=1$. 资产 m,b 不能跨国交易，而资产 k,b^* 则可跨国交易，下面就简称后者为可交易资产. 在时段 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内，个体财富的增量 $(\mathrm{d}w)=$ 收入－支出. 支出仍如 4.2 节中一样为 $\mathrm{d}c+\mathrm{d}T$，$\mathrm{d}c=c\mathrm{d}t$，而税收 $\mathrm{d}T$ 依据如下简单的规则：

$$\mathrm{d}T = w(\tau\mathrm{d}t + \mathrm{d}u_T). \tag{5}$$

税收必须因应政府预算平衡之需要，因而 τ 与 $\mathrm{d}u_T$ 均需内生地决定. 至于个体的收入，则由其所持资产的回报总合而成. 设资产 k 全部投于产业，个体通过其所拥有的股权获得如下回报：

$$\mathrm{d}y = y(\mathrm{d}t + \mathrm{d}u_Y),\quad y = Ak. \tag{6}$$

这相当于资产 k 的总回报率为 $\mathrm{d}R_k = A(\mathrm{d}t+\mathrm{d}u_Y)$，$A$ 与 $\mathrm{d}u_Y$ 都是外生的，A 相当于资产 K 的平均利率. 设另外三种资产的随机回报率分别为 $\mathrm{d}R_m,\mathrm{d}R_b,\mathrm{d}R_b^*$，则有

$$\begin{cases} \mathrm{d}R_m = r_m\mathrm{d}t - \mathrm{d}u_P,\quad r_m = \sigma_P^2 - \pi, & (7\text{a})\\ \mathrm{d}R_b = r_b\mathrm{d}t - \mathrm{d}u_P,\quad r_b = i + \sigma_P^2 - \pi, & (7\text{b})\\ \mathrm{d}R_b^* = r_b^*\mathrm{d}t - \mathrm{d}u_Q,\quad r_b^* = i^* + \sigma_Q^2 - q. & (7\text{c})\end{cases}$$

式(7)的推导如下. 设个体持有名义货币量 M 不变，因而 $\mathrm{d}M=0$ [①]，于是

$$\mathrm{d}R_m = \frac{1}{m}\mathrm{d}\left(\frac{M}{P}\right) = P\mathrm{d}\left(\frac{1}{P}\right) = (\sigma_P^2-\pi)\mathrm{d}t - \mathrm{d}u_P,\quad (\text{用式(2a)})$$

这得出式(7a). 其次，由 $b=B/P$ 与 $\mathrm{d}B/B = i\mathrm{d}t$ 得出式(7b)；类似地可得出式(7c). 综合式(5)～式(7)得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}w &= (\mathrm{d}y + m\mathrm{d}R_m + b\mathrm{d}R_b + b^*\mathrm{d}R_b^*) - (\mathrm{d}c + \mathrm{d}T)\\ &= (y + mr_m + br_b + b^*r_b^* - c - \tau w)\mathrm{d}t\\ &\quad + y\mathrm{d}u_Y - (m+b)\mathrm{d}u_P - b^*\mathrm{d}u_Q - w\mathrm{d}u_T\\ &= (\eta w - c)\mathrm{d}t + w\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases}\eta = An_1 + n_2r_m + n_3r_b + n_4r_b^* - \tau, & (8\text{a})\\ \mathrm{d}u = An_1\mathrm{d}u_Y - (n_2+n_3)\mathrm{d}u_P - n_4\mathrm{d}u_Q - \mathrm{d}u_T. & (8\text{b})\end{cases}$$

做了以上准备之后，现在可仿照 4.5 节中的问题(13)，将个体最优决策问题表为

---

① 这不应与 4.6 节式(4a)混淆.

$$\begin{cases} \max\limits_{c,n_1,n_2,n_3} \mathrm{E}_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}U(c^\theta(t)m^{\theta}(t))\mathrm{d}t \quad (0<\theta\leqslant 1), & (9a)\\ \text{s.t.} \quad \mathrm{d}w=(\eta w-c)\mathrm{d}t+w\mathrm{d}u, \quad w(0)=w_0. & (9b)\end{cases}$$

注意此处权数 θ 的设置与前面几节颇不相同. 其实这并不带来实质性的变化，只是使 $c^\theta m^{\theta}$ 成为 (c,m) 的1次齐次函数，因而使下面设定的值函数 $V(w)$ 更简单些.

模型涉及的参数与变量颇多，让我们汇总一下. $A,g,\theta,i^*,q,\rho,\sigma,\phi$ 是外生参数，$\mathrm{d}u_G,\mathrm{d}u_M,\mathrm{d}u_Q,\mathrm{d}u_Y$ 是外生Brown 运动，假定它们互不相关. 如通常一样，设在宏观均衡时比率 n_1,n_2,n_3 与 $\mu=c/w$ 均为常数($n_4=1-n_1-n_2-n_3$ 不是独立的). 模型分析的首要目标是求出均衡值 μ,n_1,n_2,n_3，同时也要确定 $\varepsilon,i,\pi,\tau,\mathrm{d}u_P,\mathrm{d}u_T,\mathrm{d}u_E$ 等，后者是政策分析所关注的. 所要完成的计算依赖于问题(9)的最优性条件及一定的宏观均衡条件，下面分别予以考虑.

C. 最优性条件

问题(9)是一个自治的随机最优化问题，依标准的结论，可写出其最优性条件如下：

$$\begin{cases} \rho V=U+(\eta-\mu)wV_w+\frac{1}{2}\sigma_u^2w^2V_{ww}, & (10a)\\ U'c^\theta m^\theta\,\frac{\theta}{c}=V_w, & (10b)\\ \frac{\partial\eta}{\partial n_1}V_w+\frac{1}{2}\,\frac{\partial\sigma_u^2}{\partial n_1}wV_{ww}=0, & (10c)\\ \left(\frac{\theta'\mu}{\theta n_2}+\frac{\partial\eta}{\partial n_2}\right)V_w+\frac{1}{2}\,\frac{\partial\sigma_u^2}{\partial n_2}wV_{ww}=0,\quad (\text{用式(10b)}) & (10d)\\ \frac{\partial\eta}{\partial n_3}V_w+\frac{1}{2}\,\frac{\partial\sigma_u^2}{\partial n_3}wV_{ww}=0. & (10e)\end{cases}$$

直接用式(8a)求出

$$\begin{cases}\partial\eta/\partial n_1=A-r_b^*=A-i^*+q-\sigma_Q^2,\\ \partial\eta/\partial n_2=r_m-r_b^*=q-\pi-i^*+\sigma_P^2-\sigma_Q^2,\\ \partial\eta/\partial n_3=r_b-r_b^*=q-\pi+i-i^*+\sigma_P^2-\sigma_Q^2.\end{cases} \tag{11}$$

其次，由式(8b)算出

$$\begin{aligned}\sigma_u^2=&A^2n_1^2\sigma_Y^2+(n_2+n_3)^2\sigma_P^2+n_4^2\sigma_Q^2+\sigma_T^2-2An_1(n_2+n_3)\sigma_{PY}\\ &-2An_1\sigma_{TY}+2n_4(n_2+n_3)\sigma_{PQ}+2(n_2+n_3)\sigma_{PT}+2n_4\sigma_{QT};\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\,\frac{\partial\sigma_u^2}{\partial n_1}=A^2n_1\sigma_Y^2-n_4\sigma_Q^2-A(n_2+n_3)\sigma_{PY}-A\sigma_{TY}-(n_2+n_3)\sigma_{PQ}-\sigma_{QT},\\ \frac{1}{2}\,\frac{\partial\sigma_u^2}{\partial n_2}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial\sigma_u^2}{\partial n_3}=(n_2+n_3)\sigma_P^2-n_4\sigma_Q^2-An_1\sigma_{PY}+(n_4-n_2-n_3)\sigma_{PQ}\\ \qquad\qquad +\sigma_{PT}-\sigma_{QT}\end{cases} \tag{12}$$

因在均衡时 $c^{\theta}m^{\theta'}=\text{const }w$，故设值函数 $V=aU(w)$，系数 $a>0$ 待定. 如已熟知的，$wV_{ww}=-\sigma V_w$，且 $wV_w=\sigma' V$. 以此及式(11)代入式(10a)～式(10e)，得到

$$\begin{cases}\rho=\dfrac{\mu^{\theta\sigma'}n_2^{\theta'\sigma'}}{a}+\sigma'(\eta-\mu)-\dfrac{1}{2}\sigma\,\sigma'\sigma_u^2, & (10a)'\\ a\mu^{1-\theta\sigma'}=\theta n_2^{\theta'\sigma'}, & (10b)'\\ \dfrac{\sigma}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial n_1}=A-r_b^* & (10c)'\\ \dfrac{\sigma}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial n_2}=r_m-r_b^*+\dfrac{\theta'\mu}{\theta n_2}, & (10d)'\\ \dfrac{\sigma}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial n_3}=r_b-r_b^*. & (10e)'\end{cases}$$

结合式(10a)′与式(10b)′解出

$$\mu=\delta\left(\rho-\eta\,\sigma'+\frac{\sigma\,\sigma'\sigma_u^2}{2}\right),\quad \delta=\frac{\theta}{1-\theta\,\sigma'}. \tag{13}$$

注意上式右端仍含有待确定的 η 与 σ_u^2. 因 $\partial\sigma_u^2/\partial n_2=\partial\sigma_u^2/\partial n_3$，故结合式(10d)′、式(10e)′与式(7)得到

$$i\,\theta\,n_2=\theta'\mu. \tag{14}$$

已得的式(10)′、式(13)、式(14)构成最终确定全部均衡值的一部分依据. 目前的主要缺陷是，σ_u^2 及 $\partial\sigma_u^2/\partial n_1$，$\partial\sigma_u^2/\partial n_2$ 的计算均依赖于尚待确定的随机扰动 $\mathrm{d}u_P$ 与 $\mathrm{d}u_T$，后者的确定依赖于一定的宏观均衡条件，这将在下小节中考虑.

4.6.2 宏观均衡

现在利用适当的宏观均衡条件来完成均衡值的计算. 下面所循的思路原则上与 4.5.2 小节并无差别，只是涉及的变量更多，计算更为繁复而已.

A. 宏观均衡条件

如前面已看到的，关键的宏观均衡条件是等增长率条件，即

$$\frac{\mathrm{d}w}{w}=\frac{\mathrm{d}k}{k}=\frac{\mathrm{d}m}{m}=\frac{\mathrm{d}b}{b}=\frac{\mathrm{d}b^*}{\mathrm{d}b}. \tag{15}$$

式(15)包含三个独立等式；若分别考虑确定性部分与随机部分，则得到六个独立等式，它们为确定所需的均衡值与内生参数提供了重要依据，尤其可用来确定随机扰动 $\mathrm{d}u$，$\mathrm{d}u_P$ 与 $\mathrm{d}u_T$.

为将条件(15)具体化，需求得 $\mathrm{d}k$，$\mathrm{d}m$，$\mathrm{d}b$，$\mathrm{d}b^*$ 的表达式，至少要求出其中三个(然后与已知的 $\mathrm{d}w$ 一起得出第四个)，而这就需要用到三个条件. 首先，联合式(2a)与式(4a)可求出(参考 3.2 节式(25b))

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}m}{m}=\dfrac{1}{m}\mathrm{d}\left(\dfrac{M}{P}\right)=\psi_m\mathrm{d}t+\mathrm{d}u_M-\mathrm{d}u_P,\\ \psi_m=\phi-\pi-\sigma_{MP}+\sigma_P^2.\end{cases}\tag{16}$$

现在还需要以下两个均衡条件：

$$\mathrm{d}m+\mathrm{d}b+\mathrm{d}T=\mathrm{d}G+m\mathrm{d}R_m+b\mathrm{d}R_b;\tag{17}$$

$$\mathrm{d}k=\mathrm{d}y-\mathrm{d}c-\mathrm{d}G+b^*\mathrm{d}R_b^*-\mathrm{d}b^*.\tag{18}$$

式(17)表达了本国政府的预算约束，其左端是政府从发行货币、出售债券及征税获得的收入，右端则是公共开支、支付给货币持有者的回报及债券利息支付. 式(18)表达了产品市场均衡，它是熟知的公式 $\mathrm{d}k=\mathrm{d}y-\mathrm{d}c-\mathrm{d}G$ 的推广，其中修正项源于可交易资产的跨国流动：增加了从国外债券获得的收益 $b^*\mathrm{d}R_b^*$，但应扣除购买外国债券的支出 $\mathrm{d}b^*$. 由式(17)可求出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}b}{b}&=\frac{1}{b}(\mathrm{d}G+m\mathrm{d}R_m+b\mathrm{d}R_b-\mathrm{d}m-\mathrm{d}T)\\&=\frac{1}{n_3}(Agn_1+n_2r_m+n_3r_b-n_2\psi_m-\tau)\mathrm{d}t\\&\quad+\frac{1}{n_3}(An_1\mathrm{d}u_G-n_2\mathrm{d}u_M-n_3\mathrm{d}u_P-\mathrm{d}u_T)\quad(\text{用式(4)、式(5)、式(7)、式(16)})\\&\triangleq\psi_b\mathrm{d}t+\mathrm{d}u_b.\end{aligned}\tag{17)'}$$

由式(18)(结合式(4)、式(6)、式(7))则可求出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(k+b^*)}{k+b^*}&=\frac{1}{k+b^*}(\mathrm{d}y-\mathrm{d}c-\mathrm{d}G+b^*\mathrm{d}R_b^*)\\&=(Ag'\omega+\omega'r_b^*-\mu\omega/n_1)\mathrm{d}t+A\omega(\mathrm{d}u_Y-\mathrm{d}u_G)-\omega'\mathrm{d}u_Q,\end{aligned}\tag{18)'}$$

其中 $\omega=n_1/(n_1+n_4)$，它取决于两种可交易资产 k 与 b^* 的比率. 现在只要将条件(15)改写成等价的形式

$$\frac{\mathrm{d}w}{w}=\frac{\mathrm{d}m}{m}=\frac{\mathrm{d}b}{b}=\frac{\mathrm{d}(k+b^*)}{k+b^*},$$

然后以式(9b)、式(16)、式(17)′、式(18)′代入，即得到我们所需要的等式：

$$\begin{cases}\psi_w=\psi_m=\psi_b=Ag'\omega+\omega'r_b^*-\mu\omega/n_1, & (19\mathrm{a})\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}u_M-\mathrm{d}u_P=\mathrm{d}u_b=A\omega(\mathrm{d}u_Y-\mathrm{d}u_G)-\omega'\mathrm{d}u_Q, & (19\mathrm{b})\end{cases}$$

其中 ψ_m 依式(16)，ψ_b 与 $\mathrm{d}u_b$ 依式(17)′.

如我们所预计的，从式(19b)可解出

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u_P&=A\omega(\mathrm{d}u_G-\mathrm{d}u_Y)+\mathrm{d}u_M+\omega'\mathrm{d}u_Q,\\ \mathrm{d}u_T&=An_1\mathrm{d}u_G-(n_2+n_3)\mathrm{d}u_M,\qquad(\text{用式(17)}')\\ \mathrm{d}u&=A\omega(\mathrm{d}u_Y-\mathrm{d}u_G)-\omega'\mathrm{d}u_Q;\end{aligned}$$

进而有

$$du_E = A\omega(du_G - du_Y) + du_M - \omega du_Q. \quad (\text{用式}(3b))$$

这就得出

$$\begin{cases} \sigma_u^2 = A^2\omega^2\sigma_0^2 + \omega'^2\sigma_Q^2, \quad \sigma_0^2 = \sigma_G^2 + \sigma_Y^2, & (20a) \\ \sigma_P^2 = \sigma_u^2 + \sigma_M^2, \quad \sigma_{PQ} = \omega'\sigma_Q^2, & (20b) \\ \sigma_{MP} = \sigma_M^2, \quad \sigma_{PY} = -A\omega\sigma_Y^2, \quad \sigma_{EQ} = -\omega\sigma_Q^2, & (20c) \\ \sigma_{PT} = A^2 n_1 \omega \sigma_G^2 - (n_2 + n_3)\sigma_M^2, \quad \sigma_{QT} = \sigma_{TY} = 0. & (20d) \end{cases}$$

为简化记号,约定

$$\alpha = A^2\sigma_0^2 + \sigma_Q^2, \quad \beta = A^2\sigma_Y^2 + \sigma_Q^2. \tag{21}$$

现在利用式(20)来简化最优性条件.首先,将式(20)代入式(12)得

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \sigma_u^2}{\partial n_1} = \beta\omega - \sigma_Q^2, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \sigma_u^2}{\partial n_2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \sigma_u^2}{\partial n_3} = \alpha\omega^2 - \omega\sigma_Q^2. \end{cases} \tag{12)'$$

然后以式(12)′代入式(10c)′与式(10e)′得到

$$A - r_b^* = \sigma(\beta\omega - \sigma_Q^2), \tag{22}$$

$$r_b - r_b^* = \sigma\omega(\alpha\omega - \sigma_Q^2). \tag{23}$$

记 $\psi = \psi_w$,则由式(16)、式(19a)及 $\sigma_{MP} = \sigma_M^2$ 有

$$\psi = \phi + \sigma_u^2 - \pi. \tag{24}$$

从式(19a)得到的其他两个方程为

$$\begin{cases} \psi = \psi_b = n_3^{-1}(Agn_1 + n_2 r_m + n_3 r_b - n_2\psi - \tau), \quad (\text{用式}(17)') & (25a) \\ \psi = Ag'\omega + \omega' r_b^* - \mu\omega/n_1; & (25b) \end{cases}$$

其中 ψ 依式(24).

这样,我们已有 7 个独立的方程:方程(3a)、方程(13)、方程(14)、方程(22)、方程(23)、方程(25a)、方程(25b)可用.为确定所需的参数 $\mu, n_1, n_2, n_3, \epsilon, i, \pi, \tau$,尚差一个条件.为此,只有增设一个宏观均衡条件,条件的选择依赖于经济上的考虑.一个看来不无道理的选择是取

$$B/M = b/m = \lambda, \tag{26}$$

其中 $\lambda > 0$ 是外生常数.采用条件(26)的实证依据是,来自一些重要经济体的资料表明,债券与货币存量似乎接近于维持固定比率.由条件(26)立得

$$n_3 = \lambda n_2, \quad n_2 + n_3 = \bar{\lambda} n_2. \tag{27}$$

至此,我们已完成了计算全部均衡值所需的准备工作.

B. 均衡值

现在来完成预定的均衡值计算.原则上这已无困难,但仍需仔细选定计算顺序.问题在于,并不容易得到直接用外生参数表出均衡值的公式,因而不得不借助于一定"中间变量".我们发现,名义利率 i 最适于用作这样的中间变量.其次,

为记号简便，如我们经常所作的，约定一些复合参数：

$$\begin{cases} \delta = \dfrac{\theta}{1-\theta\sigma'}, \quad D = \rho + \dfrac{\sigma\,\sigma'\sigma_u^2}{2} - \sigma'(\phi + \sigma_u^2), & (28a) \\ F = r_b^* - \sigma_M^2 - \alpha\sigma'\omega^2 + \sigma_Q^2(\sigma'\omega - \omega'), & (28b) \\ H = Ag'\omega + \omega' r_b^* - \phi - \sigma_u^2, \quad J = D - \sigma' H. & (28c) \end{cases}$$

注意其中δ，J与ϕ，σ_M^2无关，F与ϕ无关，D，H与σ_M^2无关.

计算的顺序是：首先求出n_1，n_2，n_3，π，ε，τ用外生参数（包括复合参数）与μ，i表出的式子，然后求出用i表出μ的式子，最后导出i所满足的方程并确定i. 具体方法如下所述.

首先，从方程(22)（并用式(7c)）解出

$$\omega = \frac{1}{\beta\,\sigma}(A - r - \sigma'\sigma_Q^2), \quad r = i^* - q. \quad (\beta\text{依式}(21)) \tag{29}$$

注意ω仅依赖于异于ϕ，σ_M^2的外生参数. 下面，ω将作为一个主要的复合参数使用. 其次，依次求出

$$n_3 = \lambda n_2 = \frac{\theta'\lambda\mu}{\theta i}, \quad (\text{用式}(14)\text{、式}(27)) \tag{30}$$

$$n_1 = \omega(1 - n_2 - n_3) = \omega\left(1 - \frac{\theta'\bar{\lambda}\mu}{\theta i}\right), \quad (\text{用式}(30)) \tag{31}$$

$$\eta = \frac{1}{\sigma'}\left(\rho + \frac{\sigma\,\sigma'\sigma_u^2}{2} - \frac{\mu}{\delta}\right). \quad (\text{用式}(13)) \tag{32}$$

将$\psi = \eta - \mu$（依式(9b)）及式(31)、式(32)代入方程(25b)，经整理后得到关于μ的二次方程：

$$\theta'(1 + \delta\sigma')\mu^2 - \mu\left(\delta\theta' J + \frac{\theta i}{\bar{\lambda}}\right) + \frac{\delta\theta i J}{\bar{\lambda}} = 0. \tag{33}$$

注意方程的系数仅依赖于异于ϕ，σ_M^2的外生参数. 设方程(33)有唯一解$\mu = \mu(i)$，将此$\mu(i)$代入式(30)～式(32)及$\psi = \eta - \mu$知n_1，n_2，n_3，η，ψ（这些都是实际量）仅依赖于i与异于ϕ，σ_M^2的外生参数. 进而求出

$$\pi = i - F; \quad (\text{用式}(23)\text{、式}(28b)) \tag{34}$$

$$\varepsilon = i - F - q + \omega\sigma_Q^2; \quad (\text{用式}(3a)\text{、式}(20c)\text{、式}(34)) \tag{35}$$

$$\tau = Agn_1 + n_3 i + (n_2 + n_3)(\sigma_P^2 - \pi - \psi). \quad (\text{用式}(25a)) \tag{36}$$

可见，π，ε，τ亦仅依赖于i与异于ϕ的外生参数.

最后余下确定i，这基于方程(24)与$\psi = \eta - \mu$：

$$\eta(i) - \mu(i) = \phi + \sigma_u^2 - i + F. \tag{37}$$

从方程(37)解出i并不成问题（实际上，联立式(32)、式(33)、式(37)消去η与μ，可得一关于i的二次方程），只是不便写出i的过繁的表达式. 这样解得的i仅依赖于包括ϕ，σ_M^2在内的外生参数，因而μ，n_1，n_2，n_3，ε，π，τ最终取决于包括ϕ，σ_M^2在内的外生参数，且可表为这些外生参数的显示式，只是它们过于繁冗而不便写

出. 这样,原则上我们已完成全部均衡值的计算.

自然要求 $\mu > 0$; 一旦此条件满足,如在3.3.3C 中所见的,就可验证值函数设定正确且横截性条件满足. 通常也要求 $n_1, n_2 > 0, n_4 \geqslant 0$ ①. 所有这些要求都需以对外生参数的一定限制来保证,下面假定这类限制已经满足.

C. 特殊情况

严格说来,上面我们仅求得了模型的部分解,因为所得的均衡值并未表为只含外生参数的最终公式,这就不能让人完全满意. 下面考虑的两种特殊情况能使结果明显改善. 这些特殊情况将有助于展示模型的本质特征.

(i) $\theta = 1$ 的情况. $\theta = 1$ 意味着货币实际上并不进入效用函数,此时必定 $i = 0$. 否则,由式(30)将有 $n_2 = n_3 = 0$, 这意味着消费者完全弃绝本国货币与债券,因而本国货币与金融政策失去任何意义. 然而,个体即使不能从持有货币直接获得效用,仍然会有对货币的诸多需求,因而 $n_2 = n_3 = 0$ 并不具有现实性. 故只能认定本国债券名义利率为零. 即使 $i = 0, \mathrm{d}R_b = \sigma_P^2 - \pi$ (依式(7b))也未必为零,因而个体仍可能有对债券的需求. 在 $i = 0$ 的情况下,可得出各均衡值依次为

$$\pi = -F; \quad \text{(用式(34))} \tag{38}$$

$$\varepsilon = \omega\sigma_Q^2 - q - F; \quad \text{(用式(35))} \tag{39}$$

$$\psi = \phi + \sigma_u^2 + F; \quad \text{(用式(24)、式(38))} \tag{40}$$

$$\mu = D - \sigma' F; \quad \text{(用式(32)、式(40)、式(28a))} \tag{41}$$

$$n_1 = \frac{\mu\omega}{H - F}, \quad n_4 = \frac{\mu\omega'}{H - F}; \quad \text{(用式(25b)、式(28c))} \tag{42}$$

$$\bar{\lambda} n_2 = 1 - \frac{n_1}{\omega} = 1 - \frac{\mu}{H - F}; \quad \text{(用式(42))} \tag{43}$$

$$\tau = \sigma_M^2 - \phi + \frac{\mu(Ag\omega + \phi - \sigma_M^2)}{H - F} \quad \text{(用式(36)、式(42)、式(43))} \tag{44a}$$

$$= \bar{\lambda} n_2(\sigma_M^2 - \phi) + Agn_1. \tag{44b}$$

因 D, F, H (依式(28))并不含 θ,故这些复合参数在 $\theta = 1$ 时并无变化.

(ii) $\sigma = 1$ 的情况. 设 $\sigma = 1$ (即取对数效用函数),则

$$\delta = \theta;$$

$$D = J = \rho; \quad \text{(用式(28a)、式(28d))}$$

$$F = r_b^* - \sigma_M^2 - \omega'\sigma_Q^2; \quad \text{(用式(28b))}$$

$$\omega = (A - r)/\beta; \quad \text{(用式(29))}$$

$$\mu = \theta\rho; \quad \text{(用式(32))}$$

$$n_3 = \lambda n_2 = \theta'\lambda\rho/i; \quad \text{(用式(30))}$$

① 显然 $n_2 > 0 \Leftrightarrow n_1 + n_4 < 1, n_4 \geqslant 0 \Leftrightarrow \omega \leqslant 1$. 注意 $n_4 < 0$ 并非完全不可能. 不过,为确定起见,下面仅处理 $n_4 \geqslant 0$ 的情况.

$$n_2 = \omega\left(1 - \frac{\theta'\bar{\lambda}\rho}{i}\right),\quad n_4 = \omega'\left(1 - \frac{\theta'\bar{\lambda}\rho}{i}\right);\qquad (用式(31))$$

$$\psi = Ag'\omega + \omega' r_b^* - \frac{\theta i \rho}{i - \theta'\bar{\lambda}\rho}.\qquad (用式(25b))$$

最后一式结合式(24)与式(34)得到关于 i 的方程

$$Ag'\omega + \omega' r_b^* - \frac{\theta i \rho}{i - \theta'\bar{\lambda}\rho} = \phi + \sigma_u^2 - i + F;$$

经整理后得

$$i^2 - i(F - H + \theta\rho + \theta'\bar{\lambda}\rho) + \theta'\bar{\lambda}\rho(F - H) = 0.$$

由此已容易解出 i，然后可得到直接用外生参数表示 $n_i(1 \leqslant i \leqslant 4)$，$\psi$，$\pi$，$\varepsilon$，$\tau$ 等的公式，不必一一写出.

4.6.3　参数的作用

所有外生参数对于每个均衡值的影响都有其经济意义，因而值得加以分析. 一个全面的讨论过于琐碎且颇费篇幅，不太有吸引力. 下面仅集中考虑本国政策参数 ϕ，σ_M^2，g 与国外市场参数 $r(\triangleq i^* - q)$，σ_Q^2 的作用. 由于变量甚多而又缺少关于均衡值的完全公式，对参数的相关性分析并不简单. 为不致陷于难获明确结果的繁琐计算，我们限于考虑 $\theta = 1$ 这一特殊情况. 如我们已熟知的，就此特殊情况获得的结论，至少亦适用于 θ' 偏小(即货币的福利效应不显著)的情况. 这一点我们将不再重复说明.

A. 参数 ϕ，σ_M^2，g 的作用

首先依次算出

$$\frac{\partial D}{\partial \phi} = -\sigma',\quad \frac{\partial D}{\partial \sigma_M^2} = 0 = \frac{\partial D}{\partial g};\qquad (用式(28a))$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = 0 = \frac{\partial F}{\partial g},\quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_M^2} = -1;\qquad (用式(28b))$$

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = -1,\quad \frac{\partial H}{\partial \sigma_M^2} = 0,\quad \frac{\partial H}{\partial g} = -A\omega;\qquad (用式(28c))$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \phi} = 0 = \frac{\partial \pi}{\partial g},\quad \frac{\partial \pi}{\partial \sigma_M^2} = 1;\qquad (用式(38))$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} = 0 = \frac{\partial \varepsilon}{\partial g},\quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_M^2} = 1;\qquad (用式(39))$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 1 = -\frac{\partial \psi}{\partial \sigma_M^2},\quad \frac{\partial \psi}{\partial g} = 0;\qquad (用式(40))$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \phi} = -\sigma' = -\frac{\partial \mu}{\partial \sigma_M^2},\quad \frac{\partial \mu}{\partial g} = 0;\qquad (用式(41))$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial r}=\dfrac{1}{\beta}(\sigma_Q^2+\beta-2\alpha\omega),\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\sigma_Q^2}=\omega'^2+\omega(2-\sigma)+\dfrac{1}{\beta}(\sigma\omega+\sigma')(\sigma_Q^2-2\alpha\omega);\end{cases}\qquad \text{(用式(40))}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mu}{\partial r}=\dfrac{\sigma'}{\beta}(\alpha\omega-\beta),\\ \dfrac{\partial\mu}{\partial\sigma_Q^2}=\dfrac{\sigma'}{2\beta}[2\alpha\omega(\sigma\omega+\theta')+\beta(\sigma-2)(1+\omega^2)];\end{cases}\qquad \text{(用式(41))}$$

$$\frac{1}{n_1}\frac{\partial n_1}{\partial s}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial s}+\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial s}+\frac{n_1}{\mu\omega}\left(\frac{\partial F}{\partial s}-\frac{\partial H}{\partial s}\right),\quad s=r,\sigma_Q^2;\quad \text{(用式(42))}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial n_1}{\partial r}=\dfrac{n_1^2}{\beta\mu\omega}\left[\beta-2\alpha\omega+\dfrac{Ag'-r_b^*}{\sigma}-\dfrac{\mu(1+n_1\sigma\omega')}{n_1\sigma}+\dfrac{\sigma'\omega(\alpha\omega-\beta)}{n_1}\right],\\ \dfrac{\partial n_1}{\partial\sigma_Q^2}=\dfrac{n_1^2}{\beta\mu\sigma\omega}\left[(\sigma\omega+\sigma')\left(2\sigma_Q^2-2\alpha\omega+Ag'-r_b^*+\dfrac{\alpha\sigma\sigma'\omega^2-\mu}{n_1}\right)\right.\\ \qquad\left.+\beta\,\sigma\omega(\sigma'+\omega)+\dfrac{\beta\,\sigma\,\sigma'\omega(\sigma-2)(1+\omega^2)}{2n_1}\right];\end{cases}$$

$$\frac{\partial n_4}{\partial s}=\frac{\omega'}{\omega}\frac{\partial n_1}{\partial s}-\frac{n_1}{\omega^2}\frac{\partial\omega}{\partial s},\quad s=r,\sigma_Q^2;$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial n_4}{\partial r}=\dfrac{n_1^2\omega'}{\beta\mu\omega^2}\left[\beta-2\alpha\omega+\dfrac{Ag'-r_b^*}{\sigma}-\dfrac{\mu(n_1\sigma\omega'^2-\omega)}{n_1\sigma\omega'}+\dfrac{\sigma'\omega(\alpha\omega-\beta)}{n_1}\right],\\ \dfrac{\partial n_4}{\partial\sigma_Q^2}=\dfrac{n_1^2\omega'}{\beta\mu\sigma\omega^2}\left[(\sigma\omega+\sigma')\left(2\sigma_Q^2-2\alpha\omega+Ag'-r_b^*+\dfrac{\omega(\mu+\alpha\sigma\,\sigma'\omega\,\omega')}{n_1\omega'}\right)\right.\\ \qquad\left.+\beta\,\sigma\omega(\sigma'+\omega)+\dfrac{\beta\,\sigma\,\sigma'\omega(\sigma-2)(1+\omega^2)}{2n_1}\right];\end{cases}$$

$$\bar{\lambda}\omega\frac{\partial n_2}{\partial s}=\frac{n_1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial s}-\frac{\partial n_1}{\partial s},\quad s=r,\sigma_Q^2;\qquad \text{(用式(43))}$$

$$\begin{cases}\bar{\lambda}\omega\dfrac{\partial n_2}{\partial r}=\dfrac{n_1^2}{\beta\mu\sigma\omega}\left[2\alpha\omega-\beta+\dfrac{r_b^*-Ag'}{\sigma}+\dfrac{\mu(\sigma'+n_1\sigma\omega')}{n_1\sigma}-\dfrac{\sigma'\omega(\alpha\omega-\beta)}{n_1}\right],\\ \bar{\lambda}\omega\dfrac{\partial n_2}{\partial\sigma_Q^2}=\dfrac{n_1^2}{\beta\mu\sigma\omega}\left[(\sigma\omega+\sigma')\left(2\alpha\omega-2\sigma_Q^2+r_b^*-Ag'-\dfrac{\alpha\sigma\,\sigma'\omega^2}{n_1}\right)\right.\\ \qquad\left.+\beta\,\sigma\omega(\sigma-\bar{\omega})+\dfrac{\beta\,\sigma\,\sigma'\omega(2-\sigma)(1+\omega^2)}{2n_1}\right];\end{cases}$$

$$\frac{1}{n_1}\frac{\partial n_1}{\partial s}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial s}-\frac{n_1}{\mu\omega}\left(\frac{\partial H}{\partial s}-\frac{\partial F}{\partial s}\right),\quad s=\phi,\sigma_M^2,g;\quad \text{(用式(42))}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial\phi}=\frac{n_1}{\mu}(n_1+n_4-\sigma')=-\frac{\partial n_1}{\partial\sigma_M^2},\quad \frac{\partial n_1}{\partial g}=-\frac{An_1^2}{\mu};$$

$$\frac{\partial n_4}{\partial s}=\frac{n_4}{n_1}\frac{\partial n_1}{\partial s},\quad s=\phi,\sigma_M^2,g;$$

$$\bar{\lambda}\frac{\partial n_2}{\partial s}=-\left(\frac{\partial n_1}{\partial s}+\frac{\partial n_4}{\partial s}\right)=-\frac{1}{\omega}\frac{\partial n_1}{\partial s},\quad s=\phi,\sigma_M^2,g;$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial\phi}=\frac{\partial n_1}{\partial\phi}\left(Ag+\frac{\phi-\sigma_M^2}{\omega}\right)-\bar{\lambda}n_2=-\frac{\partial\tau}{\partial\sigma_M^2};\qquad\text{(用式(44b))}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial g}=\frac{\partial n_1}{\partial g}\left(Ag+\frac{\phi-\sigma_M^2}{\omega}\right)+An_1.$$

综上,可分别说明 ϕ,σ_M^2,g 的作用.

(i) ϕ 的作用. ψ,μ,n_1,n_4 与 ϕ 正相关, n_2,n_3 与 ϕ 负相关. 这意味着,若可期望地加速扩张本国货币,则国内居民增加可交易资产份额而减少不可交易资产份额,结果经济增长率与消费财富比都得到提高. 但 ϕ 对 π,ε 的影响不显著,而对 τ 的影响则不确定,需要更细的讨论.

(ii) σ_M^2 的作用. ψ,μ,n_1,n_4 与 σ_M^2 负相关, n_2,n_3,π,ε 与 σ_M^2 正相关. 这意味着,若本国货币的风险加大,则国内居民减少其可交易资产而增加本国货币与债券的持有,结果是经济增长率与消费财富比均下降,期望通胀率上升,本币汇率下降. σ_M^2 对 τ 的作用与 ϕ 恰相反.

(iii) g 的作用. n_1,n_4 与 g 负相关, n_2,n_3 与 g 正相关. 这意味着,若政府增加常规性公共开支,则国内居民减少其可交易资产而增加本国货币与债券的持有. 但 g 对 ψ,μ,π,ε 的影响不显著,而对 τ 的影响不确定:当 σ_M^2 或 μ 适当大时, τ 与 g 正相关;当 σ_M^2 与 μ 均很小时, τ 与 g 负相关.

B. 参数 r 与 σ_Q^2 的作用

国外债券的期望回报率 $r_b^*=r+\sigma_Q^2$, 其中 σ_Q^2 表达了国外市场的价格冲击. r 与 σ_Q^2 对国内经济的影响无疑更值得关注,这是开放经济模型所特有的问题. 然而,涉及 r,σ_Q^2 的导数计算将导致更复杂的公式,麻烦源于 ω,σ_u^2 均与 r,σ_Q^2 有关(与之对照, ω,σ_u^2 却与 ϕ,σ_M^2,g 无关!). 今依次计算如下:

$$\frac{\partial\omega}{\partial r}=-\frac{1}{\beta\sigma},\quad\frac{\partial\omega}{\partial\sigma_Q^2}=-\frac{\sigma\omega+\sigma'}{\beta\sigma};\qquad\text{(用式(29), }\beta\text{ 依式(21))}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial r}=\dfrac{2}{\beta\sigma}(\sigma_Q^2-\alpha\omega),\\[2mm]\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial\sigma_Q^2}=\omega'^2+\dfrac{2}{\beta\sigma}(\sigma\omega+\sigma')(\sigma_Q^2-\alpha\omega);\end{cases}\qquad\text{(用式(20a), }\alpha\text{ 依式(21))}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial D}{\partial r}=\dfrac{\sigma'}{\beta\sigma}(\sigma-2)(\sigma_Q^2-\alpha\omega),\\[2mm]\dfrac{\partial D}{\partial\sigma_Q^2}=\sigma'\left(\dfrac{\sigma}{2}-1\right)\left[\omega'^2+\dfrac{2}{\beta\sigma}(\sigma\omega+\sigma')(\sigma_Q^2-\alpha\omega)\right];\end{cases}\qquad\text{(用式(28a))}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial r}=\dfrac{1}{\beta\sigma}[2\alpha\sigma'\omega+\beta\sigma+(\sigma-2)\sigma_Q^2]=-\dfrac{\partial\pi}{\partial r},\\[2mm]\dfrac{\partial F}{\partial\sigma_Q^2}=\omega(2-\sigma)+\dfrac{1}{\beta\sigma}(\sigma\omega+\sigma')[2\alpha\sigma'\omega+(\sigma-2)\sigma_Q^2]=-\dfrac{\partial\pi}{\partial\sigma_Q^2};\end{cases}$$

（用式(28b)、式(38)）

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial r}=\omega'+\dfrac{1}{\beta\,\sigma}(2\alpha\omega-2\sigma_Q^2-Ag'+r_b^*), & (\text{用式}(28c))\\ \dfrac{\partial H}{\partial\sigma_Q^2}=\omega\omega'+\dfrac{1}{\beta\,\sigma}(\sigma\omega+\sigma')(2\alpha\omega-2\sigma_Q^2-Ag'+r_b^*);\end{cases}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial s}=Ag\frac{\partial n_1}{\partial s}-\bar{\lambda}(\phi-\sigma_M^2)\frac{\partial n_2}{\partial s},\quad s=\lambda,\sigma_Q^2. \qquad (\text{用式}(44b))$$

可以看出，上述公式都不简单，倘不附加一定条件，就无从判定其符号. 很难详细讨论各种可能的情况，下面仅考虑如下特殊条件：

(i) σ_Q^2 充分小，即国外市场价格冲击是轻微的；

(ii) $\omega>(\beta/\alpha)\vee(1/2)$，为此，只要 n_4 相对于 n_1 是偏小的；

(iii) $\sigma\leqslant 2$，即消费者对于风险的厌恶是适度的；

(iv) $Ag'\leqslant r_b^*$，或至少 $Ag'-r_b^*$ 偏小；

(v) $\phi\geqslant\sigma_M^2$，或至少 $\sigma_M^2-\phi$ 偏小.

在上述条件下，可明显看出 ψ,μ,n_1 与 r 负相关，这意味着，若国外债券名义利率上升（或国外期望通胀率下降），则国内居民拥有资产 k 的份额下降；相应地，消费财富比与平均经济增长率亦下降. 若 $n_1\sigma\omega'^2\geqslant\omega$ 或 $\mu(\omega-n_1\sigma\omega'^2)$ 适当小，则 n_4 亦与 r 负相关；若 $\sigma'+n_1\sigma\omega'\geqslant 0$ 或 $\mu(\sigma'+n_1\sigma\omega')$ 适当小，则 n_2,n_3 与 r 正相关. 由 n_1 与 r 负相关、n_2 与 r 正相关，可推出 τ 与 r 负相关. 若

$$\omega>\frac{\beta\,\sigma}{2\alpha(\sigma-1)} \tag{45}$$

（此条件在 $\sigma\approx 2$ 时蕴涵于条件(ii)），则 π 与 r 正相关，因而国内期望通胀率与国外期望通胀率负相关. 综合起来似乎可以说，国外市场条件的改善导致国内经济状况恶化.

σ_Q^2 的作用更复杂些. 大致说来，σ_Q^2 对 π,ψ,μ 的作用与 q 相反，但此结论依赖于进一步的限制性条件. 例如，若

$$\omega>\frac{\sigma'^2+(\beta\,\sigma/2\alpha)(2-\sigma)}{\sigma(\sigma-1)}, \tag{46}$$

则 π 与 σ_Q^2 正相关，而 π 与 q 负相关. 注意当 $\sigma\approx 2,\omega>1/2$ 时条件(46)必满足. 类似地，分别当

$$\omega>\frac{1}{2(2\alpha\sigma-\beta)}\left[\sqrt{(2\alpha\sigma'+\beta\,\sigma)^2+4\beta(2\alpha\sigma-\beta)}-2\alpha\sigma'-\beta\,\sigma\right]$$

与

$$\omega>\frac{2}{2\alpha\sigma'+\beta\,\sigma-2\beta}\left[-\alpha\sigma'+\sqrt{\alpha^2\sigma'^2+\beta(2-\sigma)(2\alpha\sigma+\beta\,\sigma-2\beta)}\right]$$

时，ψ,μ 与 σ_Q^2 负相关. 这意味着，在上述条件下国外市场的价格冲击有损于国内的经济增长. 另一方面，国外期望通胀率的提高有益于国内经济增长. 由此可见，

国外市场的预期变化与非预期变化有着截然不同的影响. 在某种意义上,这是一个颇具普遍性的结论.

C. 福利分析

依然用前几节已标准化的方法. 令 $V = V(w_0) = a w_0^{\sigma'}/\sigma'$. 由

$$w_0 = \frac{k_0 + b_0^*}{n_1 + n_4} = \frac{\omega(k_0 + b_0^*)}{n_1}$$

及 $a = \mu^{-\sigma}$ (依式(10b)',并注意已设 $\theta = 1$),有

$$\sigma' V = \mu^{-\sigma}(\omega/n_1)^{\sigma'}(k_0 + b_0^*)^{\sigma'},$$

于是

$$-\ln(\sigma' V) = \sigma \ln\mu - \sigma' \ln\omega + \sigma' \ln n_1 - \sigma' \ln(k_0 + b_0^*) \triangleq W. \tag{47}$$

设 s 是参数 $\phi, \sigma_M^2, g, r, \sigma_Q^2$ 之一,则由式(47)有

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial s} - \frac{\sigma'}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{\sigma'}{n_1}\frac{\partial n_1}{\partial s}. \tag{48}$$

将前面已经算出的 μ_s, ω_s 与 n_{1s} 代入式(48),依次得到

$$\frac{\partial W}{\partial \phi} = \frac{\sigma'}{\mu}(n_1 + n_4 - 1) = -\frac{\partial W}{\partial \sigma_M^2};$$

$$\frac{\partial W}{\partial g} = -\frac{A n_1 \sigma'}{\mu};$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{n_1 \sigma'}{\beta \mu \omega}\left[\beta - 2\alpha\omega + \frac{Ag' - r_b^*}{\sigma} - \mu\omega' + \frac{\omega(\alpha\omega - \beta)}{n_1}\right];$$

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_Q^2} = \frac{n_1 \sigma'}{\beta \mu \sigma \omega}\left[(1 - \sigma\omega')\left(2\sigma_Q^2 - 2\alpha\omega + Ag' - r_b^* - \frac{\alpha\sigma\omega^2 + \mu(2\alpha\omega - 1 - 2\sigma_Q^2)}{n_1}\right)\right.$$
$$\left. + \beta\sigma\omega(\sigma' + \omega) + \frac{\beta\sigma\omega(\sigma - 2)(1 + \omega^2)}{2n_1}\right].$$

以上结果表明,W 与 ϕ, g 正相关而与 σ_M^2 负相关是没有疑问的. 这意味着本国货币政策与财政政策有明确的福利效果:可预期的货币扩张或公共开支扩张、货币风险的减小都能增进福利. 国外市场因素对国内居民福利的影响则不那么确定. 依然设定上段提出的条件(i)~(v),在此基础上很有可能达到 $\partial W/\partial r > 0$, $\partial W/\partial \sigma_Q^2 > 0$, 但仍需补充适当的条件,此处不拟作详细讨论. 只是指出:若 W 与 r, σ_Q^2 均正相关,则 q 与 σ_Q^2 的福利效果恰好相反(高的国外期望通胀率有损于国内居民福利,而高的国外价格冲击则有益于国内居民福利). 这就得到了类似于上段所得到的结论.

参考文献

[1] Adler M, Dumas B. International portfolio and corporation finance: a

synthesis[J]. J. of Finance, 1983, 38:925-984.

[2] Aizenman J. Wage flexibility and openness[J]. Q. J. Eco., 1985, 100: 539-550.

[3] Bianconi M. Fiscal policy in a simple two-country dynamic model[J]. J. Eco. Dyn. Control, 1995, 19:395-419.

[4] Brock P L. Investment, the current account and the relative price of nontraded goods in a small open economy[J]. J. Intern. Eco., 1988, 24:235-253.

[5] Brock P L, Turnovsky S J. The dependent economy with both traded and nontraded capital goods[J]. Rev. Intern. Eco., 1994, 2:306-325.

[6] Canzoneri M B. Exchange rate intervention policy in a multiple country world[J]. J. Intern. Eco., 1982, 13:267-289.

[7] Cole H L. Financial structure and international trade[J]. Intern. Eco. Rev., 1998, 29:237-258.

[8] Devereux M B, Shi S. Capital accumulation and the current account in a two-country model[J]. J. Intern. Eco., 1991, 30:1-25.

[9] Engel C. On the foreign exchange risk premium in a general equilibrium model[J]. J. Intern. Eco., 1992, 32:305-319.

[10] Engel C, Kletzer K. Saving and investment in an open economy with nontraded goods[J]. Intern. Eco. Rev., 1989, 30:735-752.

[11] Giovannini A, Jorion P. Interest rates and risk premia in the stock market and in the foreign exchange market[J]. J. Intern. Money & Finance, 1987, 6:107-123.

[12] Gong L, Zou H. Foreign aid reduces domestic capital accumulation and increases foreign borrowing: a theoretical analysis[J]. Ann. Eco. Finance, 2000, 11:147-164.

[13] Grinds E L. The link between domestic investment and domestic savings in open economies: evidence from balanced stochastic growth [J]. Rev. Intern. Eco., 1996, 38:1-30.

[14] Grinols E L, Turnovsky S J. Exchange rate determination and asset prices in a stochastic small open economy[J]. J. Intern. Eco., 1994, 36:75-97.

[15] Hodrick R J, Srivastava S. The covariation of risk premiums and expected future spot exchange rates[J]. J. Intern. Money & Finance, 1986, 5:5-21.

[16] Kimbrough K P. Aggregate information and the role of monetary policy in an open economy[J]. J. Political Eco., 1984, 92:268-285.

[17] Lewis K K. Inflation risk and asset market disturbances: the mean-variance model revisited[J]. J. Intern. Money & Finance, 1988, 7:273-288.

[18] Nielson S B, Sprensen P B. Capital income taxation in a growing open economy[J]. European Eco. Rev., 1991, 34:179-197.

[19] Paola G, Turnovsky S J. Intertemporal substitution risk aversion and economic performance in a stochastically growing open economy[J]. J. Intern. Money & Finance, 2003, 22:529-556.

[20] Sen P, Turnovsky S J. Investment tax credit in an open economy[J]. J. Publ. Eco., 1990, 42:277-309.

[21] Stulz R. The demand for foreign bonds[J]. J. Intern. Eco., 1983, 15: 225-238.

[22] Stulz R. Currency preferences, purchasing power risks and the determination of exchange rates in an optimizing model[J]. J. Money Credit & Banking, 1984, 16:302-316.

[23] Stulz R. An equilibrium model of exchange rate determination and asset pricing with nontraded goods and imperfect information[J]. J. Political Eco., 1987, 95:1024-1040.

[24] Taylor A, Williamson J. Capital flows to the new world as an intergenerational transfer[J]. J. Political Eco., 1994, 102:348-371.

[25] Taylor M, Sarno L. Capital flows to developing countries: long-and short-term determinants[J]. World Bank Eco. Rev., 1997, 11:451-470.

[26] Turnovsky S J. Wage indexation and exchange market intervention in a small open economy[J]. Canadian J. Eco., 1983, 16:574-592.

[27] Turnovsky S J. Domestic and foreign disturbances in an optimizing model of exchange rate determination[J]. J. Intern. Money & Finance, 1985, 4:151-171.

[28] Turnovsky S J. Tariffs and sectoral adjustment in an open economy[J]. J. Eco. Dyn. Control, 1991, 15:53-89.

[29] Turnovsky S J. International Macroeconomic Dynamics[M]. Cambridge: MIT Press, 1997.

4.7 就业与劳务市场

经济运动始于厂商招募工人及工人寻找工作. 募工与求职这两种行为都依赖于本节要讨论的劳务市场. 在劳务市场上，雇主与工人依各自的利益作出决策，在互相接受对方条件的情况下成交签约. 募工与求职，本质上是一种交易行为，因而与通常的商品交易有诸多共性. 然而，劳务市场毕竟有显著的特殊性与更多的不确定性，因而需要用更复杂的随机模型来描述，其中一些典型的模型将在本节中考虑.

如同前几节中的模型一样，劳务模型的核心问题仍然是决策者(雇主与工人)在随机条件下追求折现期望效用(利润或收益)最大化. 但一个关键区别是，涉及劳务交易的某些关键变量是离散的，这就使得本节的分析方法明显地不同于前面的方法.

4.7.1 一般描述

在给出具体的模型之前，让我们做某些一般准备，交代后面模型所依赖的基本概念框架及某些共同设定.

A. 状态及其转换

在本节中，我们总假定劳务交易在分散化的、竞争的雇主与工人之间进行，因而任何个体都不具备对市场的影响力. 不考虑人口增长与经济规模的扩大，因而假定厂商总数 n 与工人总数 N 保持不变. 分别以 L 与 $U\ (=N-L)$ 记就业人数与失业人数，以 $u=U/N$ 记失业率，它们由市场决定，在均衡时皆为常数. 如所熟知，失业率是主要的宏观经济指标之一，是政府与经济学家的重要关注对象. 任何就业理论都无法回避下述问题：失业与哪些因素有关？ 它是可以避免的资源损失吗？ 这些问题自然也是本节探讨的目标.

就业模型的复杂性首先在于，交易者可能处于不同状态，状态经常转换且充满了不确定性，致使完整的数学描述显得复杂. 工人的状态首先区分为就业与失业. 在就业(或在职)的情况下，工人的状态可进一步由两个连续变量刻画：获得工资 w 与付出的努力 e，它们分别为工人的收入与成本. 与 w 不同，e 的含义不很明确，似乎难以准确测定，且其信息未必充分显示. 在具体模型中，自然应依情况与需要对 e 作更细的界定. 但将 e 置于与 w 互成对应的关系中予以考虑，却是一个有效的思路. 工人可能因失业(被解雇或离职)、跳槽或找到工作而改变其状态. 状态的改变是随机的，用时间连续而状态离散的随机过程来描述. 在本节中仅使用 Poisson 过程. Poisson 过程简单方便，是描述某种状态随机出现的理想

工具. 在就业理论中，任何以更复杂的随机过程取代Poisson 过程的做法，似乎都不具重要意义. 准确地说，我们假设进入就业者行列的累积人数是一个参数为 a 的Poisson 过程. 这意味着，在时间 t 失业的工人在时间 $t+\tau$ 仍失业与已找到工作的概率分别为 $e^{-a\tau}$ 与 $1-e^{-a\tau}$，此概率与起点 t 无关. 因

$$a=\lim_{\tau\to 0}(1-e^{-a\tau})/\tau,$$

故可将 a 粗略地视为失业者在单位时间内找到工作的概率. 严格说来这一说法不尽妥当，实际上未必有 $a\leqslant 1$! 不过为方便起见，今后就用“a 是失业者找到工作的概率”这一简便说法，代替“找到工作者累积人数是参数为 a 的 Poisson 过程”的说法. 类似地，设就业者失去工作的概率为 b，就业者跳槽的概率为 q，二者的完整表述是不言自明的.

厂商依需要设立一定的岗位，假定同一模型中考虑的岗位是同等的. 与工人的状态相对应，岗位首先区分为**实位**与**空位**两种状态. 在实位的情况下，厂商为该岗位付出工资 w，获得产出 Ae(e 是在岗工人的劳动投入，$A>0$ 为生产力参数). 分别以 F 与 V 记实位与空位之总数；必定 $F=L$，但 V 与 U 并无必然联系. 岗位可能因空位补缺、工人去职(解雇或离职)或换人而改变状态，三者的概率分别设定为 η,b 与 p.

本节中将始终保持对 a,b,p,q,η 的上述解释；它们通常被当作常数，但在某些较精细的模型中设定为与 w 或 e 相关(这显然更合理)，当后一种情况出现时将作特别说明.

B. 收益与利润函数

与消费决策模型不同，就业模型同时涉及两类角色不同而又互相联系的个体：工人与雇主，二者的效用或收益函数是不同的. 分别以 y 与 π 记单位时间内工人的收益与雇主从其所设的一个岗位获得的利润，它们都是随机过程. 在不同的模型中，y 与 π 的表达式不尽相同. 最常用的表达式是

$$y=\begin{cases}w, & \text{就业},\\ c, & \text{失业};\end{cases}\tag{1}$$

$$\pi=\begin{cases}Ae-w, & \text{实位},\\ -\delta, & \text{空位}.\end{cases}\tag{2}$$

式(1)中 c 表示失业者所获得的补助或其他收入，其具体含义与下面的分析无关；式(2)中 δ 表示维持一个空位的成本，如空置办公设施的维持费用. 通常认定 $Ae>w>c$. 注意式(2)中完全不考虑工资以外的其他成本，这虽然有失片面，但有利于集中考虑工资决策.

当然，表达式(1)、表达式(2)还有多种变形，出现在本节中的有

$$y=\begin{cases}w-e, & \text{就业},\\ c, & \text{失业};\end{cases}\tag{1$'$}$$

$$\pi = \begin{cases} Ae - w - \delta, & \text{实位,} \\ -\delta, & \text{空位.} \end{cases} \tag{2$'$}$$

式(1)′中的 e 表示工人的投入，显然已用货币计量，否则就无法与 w 相减. 自然，适用于式(1)、式(2)的不等式 $Ae > w > c$ 现在应改成 $Ae - \delta > w > e + c$.

工人与雇主分别追求期望折现收益最大化与期望折现利润最大化，即分别解随机最优化问题：

$$\max \mathrm{E}_0 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t} y(t) \mathrm{d}t \tag{3}$$

与

$$\max \mathrm{E}_0 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t} \pi(t) \mathrm{d}t. \tag{4}$$

时间偏好率 ρ 通常取为利率 r. 分别以 V 与 v 记问题(3)与问题(4)的值函数. V 就是工人的最大期望折现总收入，今后将简称为工人的最优收入，或称为工人的最优值. 对 v 可作类似说明. 如同消费决策问题或一般动态最优化问题一样，V 与 v 都是状态的函数. 因工人与岗位都存在状态转换的问题，故决定 V 与 v 的状态变量都不像消费决策问题那样单纯. 这是问题(3)与问题(4)的复杂之处. 另一方面，因状态服从 Poisson 过程，而 Poisson 过程具有时间上的“齐次性”，这就使得值函数 V 与 v 不依赖于时间 t. 这是问题(3)与问题(4)简单的一面.

与 4.2 节中 $V(k)$ 或 $V(w)$ 这类记号不同，现在表示值函数的记号要复杂一些. V 取决于工人在决策时(通常指 $t = 0$ 时)的状态. 若分别以 E 与 U 记就业与失业，则当 $t = 0$ 时，工人就业时令 $V = V_E$;V_U 的意义自明. 若 $t = 0$ 时工人就业且获得工资 w，则令 $V = V_E(w)$. 类比于此，记号 v_F,$v_F(e)$ 及 v_V 的意义自明. 为简单起见，今后将分别令 $V(w) = V_E(w)$,$v(e) = v_F(e)$,$V_0 = V_U$,$v_0 = v_V$.

注意与消费决策问题的目标函数不同，问题(3)与问题(4)的目标函数分别线性地依赖于 y 与 π. 这表明工人与雇主都是风险中性的.

C. w 与 e 的分布

简单的观察就可看出，工资 w 与投入 e 都有明显的差异性，如同物质产品的价格与质量并非整齐划一一样. 不过，为分析方便，在模型中常作一定简化. 例如，对于给定的就业者，总假定其工资 w 与投入 e 保持不变，直至其工作终结. 对于整个市场上 w 与 e 的差异，则分为如下四种情况：w 与 e 均固定；e 固定而 w 有差异；w 固定而 e 有差异；w 与 e 均有差异. 差异性由一定概率分布来描述，下面分别予以考虑.

首先考虑工资的差异性. 在劳务市场上，寻找工作的工人随机地遇到一个招聘者，招聘者的提供工资 w 是工人无法预先确定的. 但因厂商数 n 充分大，从整个市场来看，雇主提供工资必定服从一个确定的概率分布 $F(\cdot)$，这样的 $F(\cdot)$

可由一定的实证资料测定. 本节中总假定 $F(\cdot)$ 是某个区间 $[w_L,w_H]$ 上的连续分布,它可作为已知条件给出,亦可从模型内生地确定. 在劳务市场上,通常求职者稍多于空位数,因而工人多半只能被动地接受雇主开出的工资 w (开价),但仅当 w 超过某个阈值 w_0 时,工人才可能接受;否则工人宁可失业. w_0 就是工人的最低工资或保留工资,它由市场决定. 因为提供工资并非总被工人接受,工人工资的实际分布 $G(\cdot)$ 未必与 $F(\cdot)$ 一致.

e 的差异性更为复杂. e 既可以表示工人的实际投入,亦可表示工人的潜在投入,即能力. 在后一种意义上,可给出一平行于工资的描述. 在劳务市场上,雇主随机地遇到一个求职者,求职者的能力 e 并不能预先确定. 但 e 所服从的分布 $\Phi(\cdot)$ 是确定的,且可依据市场资料测定. 假定 $\Phi(\cdot)$ 是某个区间 $[e_L,e_H]$ 上的连续分布,它对于雇主是外生的. 如果工人能力 e 是显示的,即雇主对于求职者的能力有完全的信息,则要使雇主能接受工人,工人的能力必须不低于某个阈值 e_0; 否则雇主宁可让岗位空缺. e_0 就是雇主所要求的最低能力,它如 w_0 一样由市场决定,是就业模型试图求出的重要指标. 以上描述显示出 e 与 w 之间明显的对偶性. 但在现实的市场上,尽管工人对雇主所给的工资了然于胸,而雇主对工人的能力或投入却未必完全了解.

w 与 e 的差异性对于劳务市场的分析是关键的. 由于个体差异的普遍存在,不可能由一个简单的供需平衡条件决定 w,e, 因而劳务市场并不是Walras 意义上的完全竞争市场. 注意,提供工资的差异性与对厂商的无差别性假设并存,是一个表面上矛盾的事实,值得作某些说明. 每个厂商都有同等可能提出位于 $[w_L,w_H]$ 中的任何工资,就此而言,并不能认为厂商是有差别的. 但厂商对求职者开出工资 w 时,未必确知求职者的身价,在权衡招聘成功机会与付出成本大小时,不免形成多样化的选择. 而且,工人在同一时间只能面对一个(或数量有限的)厂商,因而缺少比较不同工资的机会. 这些复杂的因素致使求职者不可能面对某个统一的工资.

D. 问题与分析方法

就业模型所要解答的问题通常有如下两种.

(a) 求出反映劳务市场状况的主要数量指标,如就业人数 L (或失业率 u); 工资水平 w; 在工资有差异时,求出最低工资 w_0 与平均工资

$$\overline{w} = \mathrm{E}w = \int_{w_L}^{w_H} w\mathrm{d}G(w); \tag{5}$$

工人能力(或投入)水平 e; 工人平均最优收入

$$\overline{V} = \mathrm{E}V = uV_0 + u'\int_{w_L}^{w_H} V(w)\mathrm{d}G(w), \tag{6}$$

$\overline{V}$ 表达了工人的福利水平.

(b) 确定上述指标与参数的相关性. 关注的重点是那些对于劳务市场状况有重大影响的参数. 例如,对于失业的分析必定要考虑参数 c, 这引导到一定的政策评价.

为解答以上问题而进行的模型分析,通常遵循以下步骤.

(i) 计算最优值 V 与 v, 其计算方法在本节中将充分标准化.

(ii) 利用适当的宏观均衡条件建立 V 与 v 之间的一定关系式. 一个典型的平衡方程为

工人最优纯收益/厂商从一个岗位获得的纯利润=const.

(iii) 从均衡方程求出一定数量指标(如 w,u 等)的均衡水平,或者得出确定某一数量指标(如 w_0)的隐式方程.

(iv) 讨论参数的影响,所用方法是标准的与初等的,不过有时也需要复杂的计算,此时颇需技巧.

(v) 极端值分析. 通常设模型参数 s 限定在某个区间 (s_0,s_1) 之内,考虑当 $s \to s_0$ 或 $s \to s_1$ 时的极限情况常导致经济学上有意义的结论.

在劳务市场上,尽管个体行为与状态是高度不确定的,但许多宏观指标则往往呈现出很大的稳定性. 正是宏观上的相对稳定性为就业模型分析提供了基本的平衡方程,从而使各种均衡指标(如失业率、工资水平)的计算成为可能. 一个最常用到的平衡方程是:在均衡时,处于一定状态的工人数与职位数保持不变,因而其流入数等于其流出数,这意味着

$$aU = bL = \eta V. \tag{7}$$

由式(7)可立即推出:

$$u = \frac{U}{L+U} = \frac{aU}{aL+aU} = \frac{b}{a+b}. \tag{8}$$

式(7)与式(8)将被多次运用. 因通常 u 很小,故式(8)表明 a 一般远大于 b, 即找到工作的机会一般远多于失去工作的机会. 若令 $a \to \infty$, 则 $u \to 0$, 此时工人达到充分就业,失业不存在.

应当指出,即使是最精细的就业模型,都远不足以完全反映劳务市场的复杂性. 最初步的考虑都会发现许多难以准确描述的情况. 例如下面几种情况.

(a) 对于 L 与 U 的统计未必能准确无误. 某些工人可能因工作不饱满而处于半失业状态,或者**暂时失业**;反之,某些失业者可能从事一些临时性的工作. 可见,对于就业与失业的界定并不简单,这就难以要求就业或失业统计完全准确.

(b) 工资 w 通常并非工人所得的全部回报. 除工资之外,雇主常常给予工人多种好处以鼓励其工作积极性,如免费就餐、休假、实物奖励等等,还可能奖以公司股权. 这些情况使得依式(3)计算的工人最优收入不尽合乎实际情况.

(c) 工人与雇主也不总是纯粹的交易关系. 工人对于公司通常有不同程度

的依附，因而伴之以一定程度的忠诚. 这种关系必然影响到双方的选择：无论更换工人或更换雇主，都不是随心所欲的事情.

注意到上述种种复杂性，对于建立一个具有准确预报力的就业模型，就不再轻易抱有完全的信心. 在很多情况下，如果理论能定性地解释我们主要关心的现象并正确地预告总的发展趋势，就足以使人满意了.

4.7.2　匹配模型

首先考虑一个最简单的情况：工资 w 与工人的劳动投入 e 都是固定的[①]，只是劳资双方"匹配"的机会具有不确定性. 下面的模型以 Pissarides(1985)的工作为基础，它所涉及的分析相对来说是较简单的.

A. 最优值

设工人收入 y 与雇主从一岗位所获利润 π 分别依式(1)与式(2)'. 因 w 与 e 均固定，工人与岗位都只有两种状态：工人就业或失业；岗位为实位或空位. 相应地，值函数 V 与 v 都只取两个值：V_E, V_0 与 v_F, v_0. 因工资与工人投入并无差异，无论工人跳槽与雇主更换工人都不具有实际意义，因而不予考虑. 在上述设定下，最优值的计算是相对简单的，不过仍具有典型性，对于今后要作的同类计算有示范作用. 下面主要考虑 V_E 的计算，V_0, v_F, v_0 的计算是类似的，几乎只需适当更换字母就可得到相应的结果.

设 $t > 0$ 充分小. 依动态规划的最优性原理与 Poisson 过程的性质，V_E 可表为

$$V_E = \int_0^t e^{-(b+\rho)s} w \, ds + e^{-\rho t}[e^{-bt} V_E + (1 - e^{-bt}) V_0] + o(t).$$

上式中，积分表达了工人在区间 $[0,t]$ 内保持工作的期望折现收益；中括号内是 V_E 与 V_0 的加权平均，而权数 e^{-bt} 与 $1 - e^{-bt}$ 恰好分别为工人在时间 t 在职与失业的概率. 从所得等式解出 V_E，然后令 $t \to 0$ 取极限得

$$V_E = \lim_{t \to 0} \frac{\int_0^t e^{-(b+\rho)s} w \, ds + e^{-\rho t}(1 - e^{-bt}) V_0}{1 - e^{-(b+\rho)t}} = \frac{bV_0 + w}{b + \rho}.$$

类似地可求出 V_0, v_F, v_0，它们的表达式均很简单且很具规则性，下面汇集在一起以便于对照：

$$\begin{cases} V_E = \dfrac{bV_0 + w}{b + \rho}, \quad V_0 = \dfrac{aV_E + c}{a + \rho}; \\ v_F = \dfrac{bv_0 + Ae - w - \delta}{b + \rho}, \quad v_0 = \dfrac{\eta v_F - \delta}{\eta + \rho}. \end{cases} \tag{9}$$

---

① 这并不意味着 w 与 e 是外生常数. 实际上 w 与 e 正要由模型内生地决定. 这一解释亦适用于其他类似情况.

参数 a,b,c,δ,η 的意义参看4.7.1小节. 由线性方程组(9)可唯一地解出 V_E,V_0, v_F,v_0, 但只有 V_E 与 V_0 的表达式是必要的

$$\begin{cases}\rho V_E = \dfrac{(a+\rho)w+bc}{a+b+\rho}, \\ \rho V_0 = \dfrac{aw+c(b+\rho)}{a+b+\rho}.\end{cases} \tag{10}$$

B. 宏观均衡

为从式(9)、式(10)得出 w,e 与模型参数之间的一定关系式,必须借助于一定宏观均衡条件,它们表现为最优值 V_E,V_0,v_F,v_0 之间的一定等式. 这类条件并非一成不变,下面采用方程

$$V_E - V_0 = v_F - v_0, \quad v_0 = 0. \tag{11}$$

其中第一个方程可解释为:一个岗位带给工人的净收入等于它带给雇主的净利润. $v_0 = 0$ 可称为**自由进入条件**,它表示厂商可无成本地增加或消去岗位. 结合式(9)~式(11)得到

$$\frac{w-c}{a+b+\rho} = \frac{Ae-w-\delta}{b+\rho} = v_F = \frac{\delta}{\eta},$$

由此解出

$$\begin{cases} 2\delta(b+\rho) = \eta(Ae-c-\delta) - a\delta, & (12a) \\ w = c + \dfrac{\delta}{\eta}(a+b+\rho). & (12b)\end{cases}$$

参数 a,b,η 未必容易直接测定,应尽可能消去,为此可利用方程(7)与方程(12a)及下面就要引进的匹配规则.

在劳务市场上,求职的工人与招工的雇主都在充满不确定性的条件下搜索,只有在适当的机会下才能相遇并达成协议,即实现**匹配**. 实现匹配的机会对于个体来说是难以预见的. 但从宏观上看,则服从很强的规则. 以 M 记单位时间内劳务市场的匹配数,设 M 可表为如下**匹配函数**:

$$M = BU^{\alpha}V^{\beta}, \tag{13}$$

其中 $B > 0, \alpha,\beta \in (0,1]$ 为参数. 式(13)表明匹配数与失业人数 U 及空位数 V 正相关,直观上这是很自然的. 注意:一般说来总有 $U,V > 0$, 即失业与空位共存而并不能直接抵消,正因市场存在摩擦,这才使匹配并非总能顺利实现.

联立方程(7)与 $M = \eta V = BU^{\alpha}V^{\beta}$ 解出

$$\begin{cases} a = bL/U = bL/(N-L), & (14a) \\ \eta = M(M/BU^{\alpha})^{-1/\beta} = B^{-1/\beta}(bL)^{-\beta'/\beta}(N-L)^{\alpha/\beta}. & (14b)\end{cases}$$

以式(14)代入式(12),得到

$$2\delta(b+\rho) = \varphi(L), \quad w = \psi(L), \tag{15}$$

函数 $\varphi(\cdot)$ 与 $\psi(\cdot)$ 的表达式不必写出. 式(15)一方面给出用给定模型参数(即

$A, B, c, \delta, \rho, N, \alpha, \beta$ 等)表出均衡就业人数 L 与均衡工资 w 的公式:

$$L = \varphi^{-1}(2\delta(b+\rho)), \quad w = \psi(\varphi^{-1}(2\delta(b+\rho))),$$

另一方面给出 L 与 w 之间的关系式 $w=\psi(L)$，后者表示 (L,w) 平面上的一条曲线.

C. 几点结论

首先考虑参数对 L, w 影响. 仅以参数 e 为例说明. 由式(12a)有

$$\begin{aligned} 0 &= A\eta + \frac{\partial \eta}{\partial e}(Ae - c - \delta) - \delta\frac{\partial a}{\partial e} \\ &= A\eta + \frac{\partial L}{\partial e}\left[\frac{\partial \eta}{\partial L}(Ae - c - \delta) - \delta\frac{\partial a}{\partial L}\right]. \end{aligned}$$

因 $Ae - c - \delta > Ae - w - \delta > 0$，直接由式(14)看出 $\partial a/\partial L > 0, \partial\eta/\partial L < 0$ (注意 $\beta \leqslant 1$!)，故得 $\partial L/\partial e > 0$；这同时也得出 $\partial a/\partial e > 0, \partial\eta/\partial e < 0$. 另一方面，由式(12b)有

$$\frac{\partial w}{\partial e} = \frac{\delta}{\eta}\frac{\partial a}{\partial e} - \frac{\delta}{\eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial e}(a + b + \rho) > 0.$$

这就得出：均衡水平 L, w 均与 e 正相关. 这意味着，就业者努力工作对于增进就业与提高工资均有正面效应. 这一结论固然是可以接受的，但在直观上未必是显然的.

类似地可得出 $\partial L/\partial c < 0$，即提高失业者收入有碍于扩大就业. 这自然是合理的. 另一方面，w 与 c 的关系则并不明确.

其次，考虑工人的平均最优值 $\overline{V}$，它是刻画工人整体(包括就业者与失业者)福利的一个数量指标. 容易求出

$$\begin{aligned} \overline{V} &= V_E - u(V_E - V_0) = V_E - uv_F \qquad \text{(用式(11))} \\ &= \frac{(a+\rho)w + bc}{\rho(a+b+\rho)} - \frac{b\delta}{\eta(a+b)}. \qquad \text{(用式(8)、式(10)、式(11))} \end{aligned}$$

于是

$$\rho\frac{\partial \overline{V}}{\partial e} = \left[\frac{b(w-c)}{(a+b+\rho)^2} + \frac{b\delta\rho}{\eta(a+b)^2}\right]\frac{\partial a}{\partial e} + \frac{a+\rho}{a+b+\rho}\frac{\partial w}{\partial e} + \frac{\delta\rho u}{\eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial a}.$$

因已知 $\partial a/\partial e > 0, \partial w/\partial e > 0$，而通常 u 甚小，故一般有 $\partial\overline{V}/\partial e > 0$，即 $\overline{V}$ 与 e 正相关. 这就表明，在职工人努力工作不仅有益于自身，而且有利于提高全体工人的福利.

4.7.3　无怠工模型

保持 4.7.2 小节中工资固定的假设，但容许工人有不同的投入. 雇主对工人既缺乏完全的监督，又不能仅仅依靠解雇的办法来促使工人努力工作，因此只能致力于设计一定的激励机制，以促使工人自动地努力工作. 鉴于问题的复杂性，

循这一思路的建模与分析都不会很简单.下面的模型依据 Shapiro 与 Stiglitz (1984)的工作,它提供了一个相对简单而又颇具说服力的例子.

A. 模型描述

雇主在缺少关于工人工作状态信息的情况下,无法实现"按劳付酬",只能付给同一固定工资 w. 工人可能选择实干(E)与怠工(S). 为便于分析,作一极端假设:实干工人与怠工工人劳动投入分别为 e 与 0(这显然不很现实),e 是固定的. 工人的收益函数从式(1)′修改为

$$y = \begin{cases} w - e, & \text{实干}, \\ w, & \text{怠工}, \\ c, & \text{失业}. \end{cases}$$

假定实干工人与怠工工人被解雇的概率分别为 b 与 b_1, $b < b_1$. 正是这一差别(即使 $b_1 - b$ 并不很大)影响到工人的行为. 直观上很明显,如果 w 很低,怠工工人即使面临较大的失业风险,未必会很珍视他现有的这份收入微薄的工作,因而无意于改变自己的工作态度. 但如果工人因怠工要冒失去一份收入优厚的工作,他必定要三思而行了. 由此可见,雇主为杜绝怠工,应将工资提高到一个适当的高度. 刚好能使雇主达到此目的的工资水平就称为**无怠工工资**,它是一种效率工资. 雇主一旦采用无怠工工资 w,其所雇工人将全部选择实干,因而其利润可表为

$$\pi = Af(el) - lw, \tag{16}$$

其中 l 表示厂商所雇工人数,$f(\cdot)$ 是新古典生产函数. 注意,此处不宜采用利润函数(2)或利用函数(2)′.

本模型中,参数 A, b, b_1, c, e, ρ 是外生的,a 由模型内生地决定;l 由厂商依据利润最大化原则选定,与工资 w 有关. $L(= nl)$ 与 w 是模型的两个主要变量,其均衡值 L^* 与 w^* 将由雇主与工人的行为共同决定.

B. 宏观均衡

以 V_i 记工人的最优值,i 表工人的状态:$i = E, S, U$. V_i 自然与工资 w 有关. 雇主必定这样选择无怠工工资 w:它刚好使得怠工者的最优值并不优于实干者的最优值,而失业风险则较大,这就使怠工者自动放弃怠工了. 因此,无怠工条件(缩写为NSC)可表成

$$V_E = V_S > V_0.$$

为使 NSC 具体化,需求出 V_i 的表达式. 因 w 与 e 均固定,V_i 的计算如同 4.7.2A中一样简单,下面略去计算过程,只写出结果:

$$\begin{cases} (b + \rho)V_E = bV_0 + w - e, \\ (b_1 + \rho)V_S = b_1 V_0 + w, \\ (a + \rho)V_0 = aV_E + c. \end{cases}$$

由以上线性方程组可唯一地解出

$$\begin{cases}\rho V_E = \dfrac{(a+\rho)(w-e)+bc}{a+b+\rho} \\ \rho V_S = \dfrac{w(ab_1+a\rho+b\rho+\rho^2)+b_1(bc+c\rho-ae)}{(a+b+\rho)(b_1+\rho)} \\ \rho V_0 = \dfrac{a(w-e)+c(b+\rho)}{a+b+\rho}.\end{cases}$$

将所得的 V_E, V_S, V_0 代入NSC，得到

$$w = c + e(a+b_1+\rho)(b_1-b)^{-1}, \tag{17}$$

$$w > c + e.$$

显然，不等式 $w > c+e$ 已蕴涵于等式(17)中，因而可以删去.

为从式(17)中消去 a，我们应用宏观均衡条件(7). 注意NSC保证了怠工消失，因而工人只剩下两种状态：实干与失业. 从 $aU = bL$ 解出 $a = bL/(N-L)$ 代入式(17)，得

$$\begin{cases}w = \alpha(N-L)^{-1}+\beta, \\ \alpha = beN(b_1-b)^{-1}, \quad \beta = c+e+e\rho(b_1-b)^{-1}.\end{cases} \tag{18}$$

方程(18)表示 (L,w) 平面上的一条上升凸曲线，称为NSC曲线，它位于水平线 $w = c+e$ 之上方(显然 $\beta > c+e$)，且以垂直线 $L = N$ 为其渐近线. 厂商选择NSC曲线上任一点 (L,w) (即选择雇工人数 $l = L/n$ 与工资 w)，都能使工人无怠工地工作.

利用式(16)写出厂商的利润最大化条件：$\partial\pi/\partial l = Aef'(el) - w = 0$，即

$$w = Aef'(eL/n) \triangleq \varphi(L). \tag{19}$$

方程(19)表示 (L,w) 平面上一条下降曲线(用 $f''(\cdot) < 0$)，即劳务需求曲线，简称为 L^D 曲线(见图4.2). 因 $f'(0) = \infty$ (依4.1节式(1))，故 L^D 曲线以 w 轴为渐近线. 容易看出NSC曲线与 L^D 曲线有唯一交点 (L^*, w^*)，它就是方程组(18)、方程组(19)的唯一解. L^* 与 w^* 就是我们所要求的均衡就业水平与均衡工资.

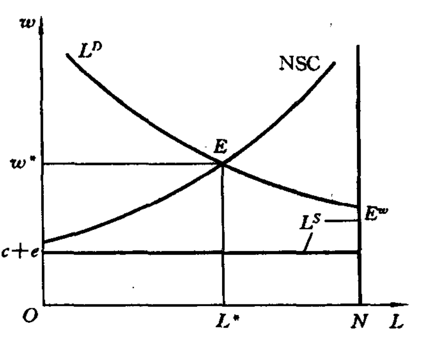


图4.2

C. 某些结论

首先考虑参数对均衡值的影响. 为简单起见，略去星号，就以 L, w 表示均衡就业人数与均衡工资. 由方程组(18)与式(19)，L 满足

$$\frac{\alpha}{N-L} + \beta = Aef'\left(\frac{eL}{n}\right). \tag{20}$$

设 s 是一个异于 N, n 的模型参数，则由式(20)有

$$\frac{1}{Nu}\frac{\partial \alpha}{\partial s}+\frac{\alpha}{N^2u^2}\frac{\partial L}{\partial s}+\frac{\partial \beta}{\partial s}=\frac{\partial (Ae)}{\partial s}f'(el)+Aef''(el)\left(\frac{e}{n}\frac{\partial L}{\partial s}+l\frac{\partial e}{\partial s}\right),$$

移项后得

$$\frac{\partial L}{\partial s}+\left[\frac{\alpha}{N^2u^2}-\frac{Ae^2}{n}f''(el)\right]$$
$$=\frac{\partial (Ae)}{\partial s}f'(el)+Aelf''(el)\frac{\partial e}{\partial s}-\frac{1}{Nu}\frac{\partial \alpha}{\partial s}-\frac{\partial \beta}{\partial s}\triangleq Q. \tag{21}$$

因式(21)等号左端方括号内为正,故 $\partial L/\partial s$ 与 Q 同号. 要判定 Q 的符号,需考虑特定的参数. 例如取 $s=c$,则 $Q=-\partial\beta/\partial c=-1$,故 $\partial L/\partial c<0$,可见提高失业者收入将使失业更严重. 类似地,取 $s=b_1$ 得 $Q>0$,可见加大怠工者的失业风险能增进就业. 这些结论都是值得注意的. 不过,L 与 e 的相关性不能确定.

另一个值得注意的结论是在极端参数下的工人状态与行为,考虑两种情况.

(i) 取 $b_1=\infty$,这意味着怠工者几乎必然被解雇,其前提在于雇主对于工人工作状况有完全的信息,因而均衡 (L^*,w^*) 成为Walras 均衡,今考察此均衡位于何处. 由式(18)知当 $b_1=\infty$ 时 $\alpha=0,\beta=c+e$,因而NSC 曲线是由水平线 $w=c+e$ 与垂直线 $L=N$ 构成的折线,记作 L^S(见图4.2). (L^*,w^*) 就是 L^D 曲线与 L^S 曲线的交点 E^w. 必定

$$w^*=Aef'(eN/n)\geqslant c+e,$$

即 $f'(eN/n)\geqslant(c+e)/(Ae)$. 直观上,在完全竞争条件下,只要失业存在,就业工人就只能得到最低工资 $c+e$,工人因担心失业而不敢怠工. 一旦失业消失,工资 w 可能是高于 $c+e$ 的任何值,而均衡值由厂商的利润最大化条件决定.

(ii) 取 $b=0$,这意味着在职工人几乎必然不被解雇. 此时由式(18)有 $\alpha=0,\beta=c+e+e\rho/b_1$,NSC 曲线退化为水平线 $w=\beta$,无怠工工资 $w=\beta$ 与就业情况无关. 在均衡状态下,在职工人与失业工人将各维持现状,失业工人将永无工作机会(注意 $a=0$!). 工人为了避免一旦失业就永无工作的命运,必定宁可接受较低的无怠工工资.

4.7.4 工资差异模型

本节前面两个模型实际上都假定 w 与 e 是固定的. 现在仍然固定 e(解释为工人的实际劳动投入),但假定工资 w 服从某个连续分布,这一改动使问题明显地复杂化. 下面的模型主要依据 Burdett 与 Mortensen(1998)的工作,它虽有点理想化,但不失为一个构思精巧的典型.

A. 模型描述

今在4.7.1 小节中一般设定的基础上,作进一步的假设与说明.

(i) 状态转换. 从工人方面说,被解雇与跳槽都可能使工人离开原有岗位. 由于工资存在差异,跳槽的动力明显存在,只是假定 $q<a$,这意味着在职工人

寻找新工作的热情不及失业者寻找工作. 为便于分析,假定失业与跳槽两者是互相独立的(这当然有点理想化). 由于工人投入无差别,雇主并无主动换人的动力,故不予考虑.

(ii) 收益与利润. 假定收益与利润函数分别依式(1)与式(2). 工人的最优值记为 $V(w)(w \geqslant w_0)$. $V(w)$ 必为增函数,因而 $V(w) \geqslant V(w_0) \geqslant V_0$. 另一方面,若 $V(w_0) > V_0$,则雇主仍有促使工人接受比 w_0 更低工资的空间,这表明必定 $V(w_0) = V_0$. 本模型不考虑厂商的跨时最优决策,因此不涉及最优值 v.

(iii) 工资分布. 假定雇主提供的工资 w 服从连续分布 $F(w)(w_0 \leqslant w \leqslant w_H)$,这是模型的最关键的假设. 最低工资 w_0 与最高工资 w_H 虽然不会因人而异,但并非外生参数,而是取决于市场,且正是模型要确定的主要数量指标. 自然要求

$$c < w_0 < w_H < Ae \triangleq B,$$

这意味着拿最低工资的工人总胜过失业者;即使付给工人最高工资,雇主仍然有利可图(参照式(2)). 如已提到的,在职工人的工资分布 $G(\cdot)$ 未必与 $F(\cdot)$ 一致. 但可以想象,$G(\cdot)$ 与 $F(\cdot)$ 之间必有很强的联系. 容易直接看出的是,必有 $F(w_0) = G(w_0) = 0, F(w_H) = G(w_H) = 1$.

模型分析的主要目标是:求出工资分布 $F(\cdot), G(\cdot)$;求出最低工资 w_0;分析 w_0 如何依赖于模型参数. 分析本模型所采取的如下步骤在一定意义上是标准的.

(a) 计算最优值 $V(w)$ 与 V_0,它们含有待定的 w_0.

(b) 利用等式 $V(w_0) = V_0$ 得出关于 w_0 的方程 $\varphi(w_0) = 0$.

(c) 利用一定宏观均衡条件求出分布函数 $F(\cdot)$ 与 $G(\cdot)$,将其代入方程 $\varphi(w_0) = 0$.

(d) 从方程 $\varphi(w_0) = 0$ 解出 w_0.

(e) 确定 w_0 与模型参数的相关性.

(f) 计算与工人福利有关的其他数量指标,并讨论其对参数的关系.

B. 最优值

最优值的计算原则上与4.7.2A 并无不同,但因涉及连续的工资分布而不免要复杂些.

取定 $w \in [w_0, w_H]$. 设 $t > 0$ 充分小,类似于4.7.2A 中计算 V_E 时所作的,有

$$\begin{aligned} V(w) = &\int_0^t \mathrm{e}^{-(b+q+\rho)s} w \mathrm{d}s + o(t) \\ &+ \mathrm{e}^{-\rho t}[\mathrm{e}^{-(b+q)t}V(w) + (1-\mathrm{e}^{-bt})V_0 + \mathrm{e}^{-bt}(1-\mathrm{e}^{-qt})Q(w)]. \end{aligned}$$

式中,积分表示工人在区间 $[0,t]$ 内保持原工作的期望折现收益;中括号内是

$V(w)$、V_0 与 $Q(w)$ 三者的加权平均，权数 $e^{-(b+q)t}$、$1-e^{-bt}$ 与 $e^{-bt}(1-e^{-qt})$ 分别为在时间 t 工人保持原工作、失业与跳槽的概率，$Q(w)$ 表示工人跳槽后的最大期望折现收益. 如同在 4.7.2A 中一样，解出 $V(w)$ 然后令 $t\to 0$ 取极限得

$$V(w)=\frac{bV_0+qQ(w)+w}{b+q+\rho}. \tag{22}$$

为完成 $V(w)$ 的计算，必须算出 $Q(w)$. 设试图跳槽的工人在寻找新工作时遇到的提供工资为 s. 若 $s\leqslant w$（这样的概率为 $F(w)$），则工人宁可保持原工作；若 $s>w$，则工人的期望最优值为 $\int_w^{w_H}V(s)\mathrm{d}F(s)$. 综上得出

$$\begin{aligned}Q(w)&=F(w)V(w)+\int_w^{w_H}V(s)\mathrm{d}F(s)\\&=F(w)V(w)-\int_w^{w_H}V(s)\mathrm{d}\overline{F}(s)\quad(\overline{F}=1-F)\\&=V(w)+\int_w^{w_H}\overline{F}(s)\mathrm{d}V(s).\qquad\text{(分部积分)}\end{aligned}$$

以此代入式(22)，然后解出 $V(w)$ 得

$$(b+\rho)V(w)=bV_0+w+q\int_w^{w_H}\overline{F}(s)\mathrm{d}V(s). \tag{22$'$}$$

由式(22)′可推出

$$V'(w)=1/[b+\rho+q\overline{F}(w)], \tag{23}$$

$$\rho V_0=w_0+qI,\quad I=\int_{w_0}^{w_H}\overline{F}(w)\mathrm{d}V(w). \tag{24}$$

因已知 $V_0=V(w_0)$，似乎已无须计算 V_0. 但 w_0 是未知的，我们正要利用等式 $V_0=V(w_0)$ 来确定 w_0，因此需要独立地求出 V_0. 不过 V_0 的计算类似于 $V(w)$ 且更简单，我们只写出结果：

$$\rho V_0=c+aI.\quad (I\text{ 依式(24)}) \tag{24$'$}$$

联立方程(24)与方程(24)′消去 V_0 得

$$\begin{aligned}0&=(a-q)I+c-w_0\\&=\int_{w_0}^{w_H}\frac{(a-q)\overline{F}(w)}{b+\rho+q\overline{F}(w)}\mathrm{d}w+c-w_0\triangleq\varphi(w_0),\end{aligned} \tag{25}$$

其中用了式(23). 方程(25)就是我们所需要的关于最低工资 w_0 的方程. 不过，在目前的形式下，方程(25)还不便于用作分析，因函数 $F(\cdot)$ 及 w_H 都有待确定，这正是下面所要解决的.

C. 分布函数

本段的任务是求出分布函数 $F(\cdot)$ 与 $G(\cdot)$，这依赖于适当的宏观均衡条件.

任给 $w\in[w_0,w_H]$，设厂商雇用工人数为 $l(w)$，则厂商在单位时间内所获

得的利润为 $(B-w)l(w)$（用式(2)）. 在均衡时厂商的利润应与 w 无关(这是关键!)，因此

$$l(w)=\frac{B-w_0}{B-w}l(w_0)\quad(w_0\leqslant w\leqslant w_H).\tag{26}$$

另一个关键的宏观均衡条件是：在均衡时任何工资段内的工人数保持动态平衡，这得出

$$aUF(w)=bLG(w)+qL\overline{F}(w)G(w),\tag{27}$$

其中 $aUF(w)$ 表示找到工作且工资不大于 w 的失业工人数；$LG(w)$ 是工资不大于 w 的在职工人数，这群工人中失去工作与转入工资大于 w 者之人数分别为 $bLG(w)$ 与 $qL\overline{F}(w)G(w)$. 以 $aU=bL$（依式(7)）代入式(27)得

$$G(w)=\frac{bF(w)}{b+q\overline{F}(w)}\text{ 或 }\overline{G}(w)=\frac{(b+q)\overline{F}(w)}{b+q\overline{F}(w)};\tag{27$'$}$$

$$G'(w)[b+q\overline{F}(w)]=F'(w)[b+qG(w)].\tag{28}$$

为将式(26)～式(28)结合起来，考虑

$$l(w)=\lim_{\Delta w\to 0}\frac{L\Delta G(w)}{n\Delta F(w)}=\frac{LG'(w)}{nF'(w)}=\frac{L[b+qG(w)]}{n[b+q\overline{F}(w)]}.\qquad\text{(用式(28))}$$

在上式中取 $w=w_0$ 得 $l(w_0)=bL/n(b+q)$；以 $l(w)$ 与 $l(w_0)$ 的表达式代入式(26)，经整理后得

$$\frac{bqF(w)}{b+q}+qx^2G(w)=b(1-x^2),\quad x=\sqrt{\frac{B-w}{B-w_0}}.$$

将式(27)$'$代入以上方程，得到一个关于 $F(w)$ 的二次方程，由其解出(注意 $0\leqslant F(w)\leqslant 1$)

$$F(w)=q^{-1}(b+q)(1-x),\tag{29}$$

或

$$q\overline{F}(w)=(b+q)x-b.\tag{29$'$}$$

以式(29)代入式(27)$'$得

$$b^{-1}qG(w)=x^{-1}-1.\tag{30}$$

直接计算知 $\partial x/\partial w<0,\partial^2x/\partial w^2<0$；然后易从式(29)、式(30)得出在区间 (w_0,w_H) 内 $F'(\cdot),F''(\cdot),G'(\cdot),G''(\cdot)$ 皆为正. 另一方面，用式(27)$'$易得，在 (w_0,w_H) 内

$$F-G=\overline{G}-\overline{F}=\frac{qF\overline{F}}{b+q\overline{F}}>0.$$

综合以上结论，可知 $F(\cdot)$ 与 $G(\cdot)$ 的图形具有如图4.3所示的形态. 注意，$F>G$ 表明 G 对 F 为一阶随机占优，这推出

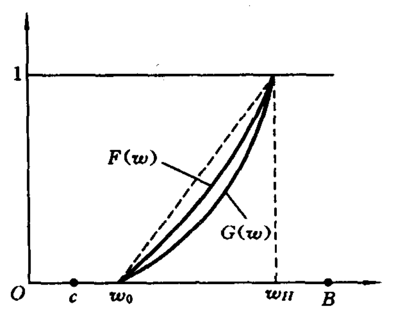


图4.3

$$\int_{w_0}^{w_H} w\mathrm{d}F(w) < \int_{w_0}^{w_H} w\mathrm{d}G(w),$$

即平均提供工资<平均实际工资. 直观上，这是很自然的.

在式(29)中取 $w = w_H$ 并注意 $F(w_H) = 1$，得出

$$w_H = w_0 + \mu(B - w_0), \quad \mu = q(2b+q)(b+q)^{-2}. \tag{31}$$

D. 最低工资 w_0

在作了前面的准备之后，现在已接近于达到我们的主要目标：求出最低工资 w_0 并阐明它与参数的相关性.

由 $x = \sqrt{(B-w)/(B-w_0)}$ 解出 $w = B - x^2(B-w_0)$，因而

$$\mathrm{d}w = 2x(w_0 - B)\mathrm{d}x.$$

于是

$$\varphi(w_0) = \int_{w_0}^{w_H} \frac{(a-q)\overline{F}(w)}{b+\rho+q\overline{F}(w)}\mathrm{d}w + c - w_0 \qquad (\text{用式}(25))$$

$$= \int_{\frac{b}{b+q}}^{1} \frac{q^{-1}(a-q)[(b+q)x-b]}{(b+q)x+\rho} \cdot 2x(B-w_0)\mathrm{d}x + c - w_0$$

(用式(29)、式(31))

$$= \frac{2(a-q)(B-w_0)}{q}\int_{\frac{b}{b+q}}^{1} \frac{(b+q)x^2-bx}{(b+q)x+\rho}\mathrm{d}x + c - w_0$$

$$= 2q^{-1}(a-q)(B-w_0)J + c - w_0,$$

其中 J 表算式中的积分，它仅与参数 b,q,ρ 有关，且易见 $J > 0$. 于是由方程 $\varphi(w_0) = 0$ 解出

$$w_0 = B - \frac{q(B-c)}{2(a-q)J+q}. \tag{32}$$

由式(32)易直接验证 $c < w_0 < B$.

为便于对 w_0 作进一步的考察，不免要算出积分 J. 这件事是完全初等的，但颇繁琐. 令 $g(x) = (b+q)x + \rho$，则

$$(b+q)x^2 - bx = \alpha g^2(x) + \beta g(x) + \gamma,$$

其中 α,β,γ 待定. 依次取 $x = 0,1,2$ 可得关于 α,β,γ 的线性方程组

$$\begin{cases} \alpha g^2(0) + \beta g(0) + \gamma = 0, \\ \alpha g^2(1) + \beta g(1) + \gamma = q, \\ \alpha g^2(2) + \beta g(2) + \gamma = 2b + 4q. \end{cases}$$

由此解出

$$\alpha = \frac{1}{b+q}, \quad \beta = -\frac{b+2\rho}{b+q}, \quad \gamma = \frac{\rho(b+\rho)}{b+q}.$$

于是

$$J=\int_{\frac{b}{b+q}}^{1}\left[\alpha g(x)+\beta+\frac{\gamma}{g(x)}\right]\mathrm{d}x$$
$$=\int_{\frac{b}{b+q}}^{1}\left[\alpha\rho+\beta+\alpha(b+q)x+\frac{\gamma}{(b+q)x+\rho}\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{q(\alpha\rho+\beta)}{b+q}+\frac{\alpha(q^2+2bq)}{2(b+q)}+\frac{\gamma}{b+q}\ln\frac{b+q+\rho}{b+\rho}$$
$$=\frac{q(q-2\rho)}{2(b+q)^2}+\frac{\rho(b+\rho)}{(b+q)^2}\ln\frac{b+q+\rho}{b+\rho}. \tag{33}$$

通常 ρ 充分小，因而由式(33)有 $J\approx q^2/2(b+q)^2$；以此代入式(32)得出 w_0 的近似表达式

$$w_0\approx B-\frac{(B-c)(b+q)^2}{aq+b^2+2bq}\triangleq w_0^*. \tag{32)'$$

现在考虑 w_0 与参数的相关性. 直接从式(32)看出 w_0 与 B,a,c,J 正相关. 其次，由式(33)不难推出，当 ρ 充分小，$q\leqslant b+2\rho$ 时有 $\partial J/\partial b<0$. 由此可见，如下每项措施都有助于提高最低工资：

(i) 提高生产力；

(ii) 加大在职工人的劳动投入；

(iii) 增加失业者的就业机会；

(iv) 提高失业补助金；

(v) 降低在职工人的失业风险.

E. 其他指标

除 w_0 之外，值得关注的其他指标有：平均实际工资 $\overline{w}$；实际工资的方差 σ_w^2；工人的平均最优值 $\overline{V}$ 等. 下面分别考虑.

(i) 平均工资 $\overline{w}$. $\overline{w}$ 的计算相对较容易，

$$\overline{w}=\int_{w_0}^{w_H}w\mathrm{d}G(w)=-\int_{w_0}^{w_H}w\mathrm{d}\overline{G}(w)$$
$$=w_0+\int_{w_0}^{w_H}\overline{G}(w)\mathrm{d}w \qquad \text{(分部积分)}$$
$$=w_0+\int_{w_0}^{w_H}\frac{(b+q)\overline{F}(w)}{b+q\overline{F}(w)}\mathrm{d}w \qquad \text{(用式(27)')}$$
$$=w_0+\frac{2(b+q)(B-w_0)}{q}\int_{\frac{b}{b+q}}^{1}\frac{(b+q)x-b}{b+q}\mathrm{d}x \qquad \left(\text{用 } x=\sqrt{\frac{B-w}{B-w_0}}\right)$$
$$=\frac{bw_0+qB}{b+q}=\frac{bw_0+(b+q)w_H}{2b+q}. \qquad \text{(用式(31))} \tag{34}$$

式(34)表明，$\overline{w}$ 是 w_0 与 B(或 w_0 与 w_H)的加权平均. 因 $\overline{w}$ 与 w_0 正相关，若 w_0 与 s 正相关且 s 异于 b,q(如 $s=a,B,c$)，则 $\overline{w}$ 亦与 s 正相关. 其次，设 $\partial w_0/\partial b<$

0，则

$$(b+q)\frac{\partial \overline{w}}{\partial b}=w_0-\overline{w}+b\frac{\partial w_0}{\partial b}<0,$$

这表明 $\overline{w}$ 与 b 负相关，即加大失业风险会降低平均工资.

(ii) 方差 σ_w^2. 因 $\sigma_w^2=\mathrm{E}w^2-\overline{w}^2$，故只要计算

$$\begin{aligned}\mathrm{E}w^2&=\int_{w_0}^{w_H}w^2\mathrm{d}G(w)=-\int_{w_0}^{w_H}w^2\mathrm{d}\overline{G}(w)\\&=w_0^2+\int_{w_0}^{w_H}\frac{2(b+q)w\overline{F}(w)}{b+q\overline{F}(w)}\mathrm{d}w\qquad\text{(分部积分)}\\&=w_0^2+\frac{4(B-w_0)}{q}\int_{\frac{b}{b+q}}^{1}[(b+q)x-b][B-(B-w_0)x^2]\mathrm{d}x\\&=w_0^2+\frac{q(B-w_0)[Bq(4b+3q)+w_0(6b^2+8bq+3q^2)]}{3(b+q)^3}.\end{aligned}$$

于是结合式(34)得

$$\begin{aligned}\sigma_w^2&=\mathrm{E}w^2-\left[w_0+\frac{q(B-w_0)}{b+q}\right]^2\\&=\frac{bq^2(B-w_0)^2}{3(b+q)^3}=\frac{bq^4(B-c)^2}{3(b+q)^3[2(a-q)J+q]^2}\qquad\text{(用式(32))}\qquad(35)\\&\approx\frac{bq^2(b+q)(B-c)^2}{3(aq+b^2+2bq)^2}.\qquad\left(\text{用 }J\approx\frac{q^2}{2(b+q)^2}\right)\qquad(35)'\end{aligned}$$

用式(35)′可验证 σ_w^2 与 $B-c,q$ 正相关，与 a 负相关. 由此可见，提高生产力、降低失业补助、加大工人流动性与减少失业者就业机会，都会扩大工资差距.

(iii) 平均最优值 $\overline{V}$. 依据公式(6)计算 $\overline{V}$，原则上不成问题，但颇为繁琐，下面只写出主要步骤：

$$\begin{aligned}\overline{V}&=uV_0+u'\int_{w_0}^{w_H}V(w)\mathrm{d}G(w)\qquad\text{(用式(6))}\\&=V_0+u'\int_{w_0}^{w_H}\overline{G}(w)\mathrm{d}V(w)\qquad\text{(分部积分)}\\&=\frac{c}{\rho}+\frac{a}{\rho(a+b)}\int_{w_0}^{w_H}\frac{(a+b)\overline{F}(w)+\rho\,\overline{G}(w)}{b+\rho+q\overline{F}(w)}\mathrm{d}w\qquad\text{(用式(24)′)}\\&=\frac{c}{\rho}+\frac{a}{\rho(a+b)}\int_{w_0}^{w_H}\frac{\overline{F}(w)[ab+b^2+b\rho+q\rho+q(a+b)\overline{F}(w)]}{[b+\rho+q\overline{F}(w)][b+q\overline{F}(w)]}\mathrm{d}w\\&\qquad\text{(用式(27)′)}\\&=\frac{c}{\rho}+\frac{2a(B-w_0)}{q\rho(a+b)}\int_{\frac{b}{b+q}}^{1}\frac{[(a+b)x+\rho][(b+q)x-b]}{(b+q)x+\rho}\mathrm{d}x\qquad\text{(用式(29)′)}\\&\triangleq\frac{c}{\rho}+\frac{2a(B-w_0)}{q\rho(a+b)}J_1.\qquad(36)\end{aligned}$$

对于积分 J_1 可套用积分 J 的表达式，只是将其中的常数 α,β,γ 更换为

$$\alpha=\frac{a+b}{b+q},\ \beta=-\frac{b(a+b)+\rho(2a+b-q)}{b+q},\ \gamma=\frac{\rho(a-q)(b+\rho)}{b+q},$$

它们取决于等式

$$[(a+b)x+\rho][(b+q)x-b]=\alpha g^2(x)+\beta g(x)+\gamma.$$

于是

$$J_1=\frac{q^2(a+b)-2q\rho(a-q)}{2(b+q)^2}+\frac{\rho(a-q)(b+\rho)}{(b+q)^2}\ln\frac{b+q+\rho}{b+\rho}.$$

以此代入式(36)，即得到 $\overline{V}$ 的完全表达式，但这一过长的表达式并不便于分析，不去写出它. 若 ρ 充分小，则

$$J_1\approx\frac{q^2(a+b)}{2(b+q)^2},\quad B-w_0\approx\frac{(B-c)(b+q)^2}{aq+b^2+2bq}.\quad (用式(32)')$$

代入式(36)得

$$\overline{V}\approx\frac{aqB+bc(b+2q)}{\rho(aq+b^2+2bq)}.\tag{36)'}$$

在近似等式适用的范围内，容易判明 $\overline{V}$ 与 a,B,c 正相关，与 b,ρ 负相关. 这与 $\overline{w}$ 的情况是类似的.

(iv) 税收 T. 设政府以税率 τ 征收收入税，则总税收为

$$\begin{aligned}T&=\tau(n\pi+L\overline{w})\\&=\tau\left[n(B-w_0)\cdot\frac{bL}{n(b+q)}+\frac{L(bw_0+qB)}{b+q}\right]=\tau BL.\quad (用式(34))\end{aligned}$$

若 T 全部用于失业补贴，则有

$$\tau BL=cU=c(bL/a),$$

由此解出 $c=a\tau B/b$. 利用这一公式，可消去 $w_0,\overline{w},\overline{V}$ 等表达式中的 c.

4.7.5 能力差异模型

与工资差异模型相反，可作如下假定：工资 w 是固定的，而 e 服从某个连续分布. 对于 e 又可作三种不同解释：表示工人能力；表示工人劳动投入且完全显示；表示工人劳动投入但不完全显示. 这三种情况导致很不相同的模型，我们将在以下两小节中分别予以考虑. 这些模型都可看做工资差异模型的某种对偶模型；注意到这种对偶性，对于理解下面的分析是重要的.

A. 模型描述

下面的描述与4.7.4A 大体上对应，因而我们可以做得简略些.

(i) 状态转换. 由于工人的能力存在差异，雇主换人的事自然时有发生，假定其概率为 p，且 $\eta>p$ (与 $a>q$ 对照)，即空位补缺的机会更多于换人的机会(这通常是合理的)，同时还假定岗位空缺与雇主换人这两件事是互相独立的.

(ii) 收益与利润. 设收益与利润函数分别为式(1)与式(2). 如已约定的，以

$v(e)$ 与 v_0 记厂商从一岗位所获利润的最优值(下面简称为最优值). $v(e)$ 是 e 的增函数. 本模型中并不考虑工人的跨时最优决策,因此不涉及其最优值 V.

(iii) 能力分布,假定工人能力 e 服从某个连续分布 $\Phi(e)(e_L \leqslant e \leqslant e_H)$, 这是模型的关键假设. 能力 e 由工人的工作实绩量度,这意味着工人总是尽力而为;而且假定雇主对于求职工人的能力有完全的判断. 以上假设无疑都是高度理想化的. 设雇主所能接受的工人最低能力为 e_0, 它由市场竞争所决定,是模型所要确定的主要指标. 自然要求 $e_L \leqslant e_0 \leqslant e_H, w < Ae_0$, 后者表示雇主从所雇的最低能力的工人身上也是能获得利润的. 必定 $\Phi(e_L) = 0, \Phi(e_H) = 1$, 但未必 $\Phi(e_0) = 0$ (与 $F(w_0) = 0$ 对照!). 下面约定 $\Phi_0 = \Phi(e_0), \overline{\Phi}_0 = 1 - \Phi_0$.

与4.7.4 小节相对应,现在的主要目标是确定 e_0, 并讨论它与模型参数的相关性. 为此,需要计算最优值 v, 然后利用 $v(e_0) = v_0$ (与 $V(w_0) = V_0$ 对照!),得出含 e_0 的方程 $\varphi(e_0) = 0$, 所要的结论将由对此方程的分析得出. 以上思路与4.7.4小节中对 w_0 的研究似乎恰成对应. 但我们要立即指出一个关键差别:工人的能力是不能由自己选择的,因而分布函数 $\Phi(\cdot)$ 只能外生地给定,并不像 $F(\cdot)$ 一样取决于市场均衡. 实际上, $\Phi(\cdot)$ 可由实际统计资料确定,它并不因市场竞争而改变. 正是由于 $\Phi(\cdot)$ 与 $F(\cdot)$ 的上述差别,致使本小节的结果与4.7.4 小节有很大不同.

B. 最优值

尽管 $\Phi(\cdot)$ 与 $F(\cdot)$ 有本质差别,但 v 的计算却很接近于4.7.4B 中 V 的计算,下面不妨写得简略些.

取定 $e \in [e_0, e_H]$. 当 $t > 0$ 充分小时有

$$v(e) = \int_0^t \mathrm{e}^{-(b+p+\rho)s}(Ae - w)\mathrm{d}s + o(t)$$
$$+ \mathrm{e}^{-\rho t}[\mathrm{e}^{-(b+p)t}v(e) + (1 - \mathrm{e}^{-bt})v_0 + \mathrm{e}^{-bt}(1 - \mathrm{e}^{-pt})Q(e)],$$

其中 $Q(e)$ 是岗位换人后的最大期望折现利润. 类似于4.7.4B 中 $Q(w)$ 的计算,有

$$Q(e) = v(e)[\Phi(e) - \Phi(e_0)] + \int_e^{e_H} v(s)\mathrm{d}\Phi(s)$$
$$= v(e)\overline{\Phi}_0 + \int_e^{e_H} \overline{\Phi}(s)\mathrm{d}v(s).$$

于是得到类似于式(22)~式(24)的公式:

$$v(e) = \frac{bv_0 + pQ(e) + Ae - w}{b + p + \rho} = \frac{bv_0 + Ae - w + p\int_e^{e_H}\overline{\Phi}(s)\mathrm{d}v(s)}{b + \rho + p\Phi_0};$$

$$v'(e) = A/[b + \rho + p\Phi_0 + p\overline{\Phi}(e)]; \tag{37}$$

$$(\rho + p\Phi_0)v_0 = Ae_0 - w + pI, \quad I = \int_{e_0}^{e_H}\overline{\Phi}(e)\mathrm{d}v(e). \tag{38}$$

注意,因未必有 $\Phi_0 = 0$,以上公式不及式(22)～式(24)那样简洁.

另一方面,可通过独立计算 v_0 得出

$$(\rho + \eta\Phi_0)v_0 = -\delta + \eta I. \quad (I \text{ 依式}(38)) \tag{38'}$$

式(38)′可看作式(24)′的一个对应公式.联立方程(38)与方程(38)′消去 v_0 得

$$\begin{aligned} 0 &= (\rho + \eta\Phi_0)(Ae_0 - w + pI) - (\rho + p\Phi_0)(\eta I - \delta) \\ &= \rho(p - \eta)I + \delta(\rho + p\Phi_0) + (Ae_0 - w)(\rho + \eta\Phi_0) \\ &= \int_{e_0}^{e_H} \frac{A\rho(p - \eta)\overline{\Phi}(e)}{b + \rho + p\Phi_0 + p\overline{\Phi}(e)} \mathrm{d}e \\ &\quad + \Phi_0(Ae_0\eta - \eta w + \delta p) + \rho(Ae_0 - w + \delta) \\ &\triangleq \varphi(e_0). \end{aligned} \tag{39}$$

这就是对应于方程(25)的方程.与方程(25)中的 w_H 不同,此处的 e_H 是一个外生参数,与 e_0 无关.其次注意到,因已假定 $p < \eta$,方程(39)中的积分为负.因不能像 $F(w)$ 一样求出 $\Phi(e)$ 的表达式,方程(39)中的积分已无法化简.

C. 某些结论

(i) e_0 存在的唯一性.利用方程(39)直接算出:

$$\begin{aligned} \varphi'(e_0) &= \int_{e_0}^{e_H} \frac{Ap\rho(\eta - p)\overline{\Phi}(e)\Phi'(e_0)}{[b + \rho + p\Phi_0 + p\overline{\Phi}(e)]^2} \mathrm{d}e + \frac{A\rho\overline{\Phi}_0(\eta - p)}{b + p + \rho} \\ &\quad + \Phi'(e_0)(Ae_0\eta - \eta w + \delta p) + A(\eta\Phi_0 + \rho) \\ &> 0, \end{aligned}$$

可见 $\varphi(\cdot)$ 为严格增函数.因

$$\varphi(e_H) = (Ae_H - w)(\eta + \rho) + \delta(p + \rho) > 0,$$

故只要 $\varphi(e_L) < 0$,即

$$\int_{e_L}^{e_H} \frac{A(\eta - p)\overline{\Phi}(e)}{b + \rho + p\overline{\Phi}(e)} \mathrm{d}e > Ae_L - w + \delta, \tag{40}$$

则方程 $\varphi(e_0) = 0$ 必有唯一解 $e_0 \in (e_L, e_H)$.因未给出 $\Phi(\cdot)$ 的表达式,故无法将条件(40)具体化.下面假定条件(40)已满足.

(ii) e_0 与参数的相关性.对任给模型参数 s,由

$$\varphi'(e_0)\frac{\partial e_0}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$$

及 $\varphi'(e_0) > 0$,知 $\partial e_0/\partial s$ 与 $\partial \varphi/\partial s$ 有相反的符号,且可直接看出 $\partial\varphi/\partial w < 0$.其次,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\rho I + \Phi_0(Ae_0 - w).$$

通常失业率 u 很小,即几乎各种能力的工人均被雇用,因而 $\Phi_0 \approx 0$,故可认为 $\partial\varphi/\partial\eta < 0$(显然 $I > 0$).这就表明,w, η 都与 e_0 正相关;提高工资 w 或增加空

位补缺机会，都会使 e_0 上升，致使工人就业门坎更高.

对于其他参数可作类似分析.

(iii) 平均利润 $\bar{v}$. 在均衡时有 $bL=\eta V$，因而空位率为 $b/(b+\eta)$（与失业率 $u=b/(a+b)$ 对照）. 于是，雇主从其所设的一个岗位所获的平均最优利润为（对照公式(6)）

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{bv_0}{b+\eta}+\frac{\eta}{b+\eta}\int_{e_0}^{e_H}v(e)\mathrm{d}\Phi(e)\\ &= \frac{v_0(b+\eta\bar{\Phi}_0)}{b+\eta}+\frac{\eta I}{b+\eta} \qquad \text{(分部积分)}\\ &= \frac{\eta I(b+\eta+\rho)-\delta(b+\eta\bar{\Phi})}{(b+\eta)(\rho+\eta\Phi_0)}. \qquad \text{(用式(38)')}\end{aligned}$$

从方程(39)解出

$$I=\frac{(Ae_0-w)(\rho+\eta\Phi_0)+\delta(\rho+p\Phi_0)}{\rho(\eta-p)},$$

代入 $\bar{v}$ 的表达式得

$$\bar{v}=\frac{\eta(Ae_0-w)(b+\eta+\rho)}{\rho(\eta-p)(b+\eta)}+\frac{\delta(bp+p\eta+\eta\rho)}{\rho(\eta-p)(b+\eta)}. \tag{41}$$

式(41)可与式(36)相对照. 只是在计算 $\bar{v}$ 时，我们将 $\Phi(e)$ 当成了在职工人的能力分布，这实际上是有误差的. 只是这一误差必定不会很大，因而忽略不计了. 利用式(41)即可讨论 $\bar{v}$ 与模型参数的相关性，这些都不拟细述了.

4.7.6 效力差异模型

如同 4.7.5 小节中一样，仍设工资 w 是固定的，而 e 服从某个连续分布 $\Phi(e)(e_L\leqslant e\leqslant e_H)$，但改变对 e 的解释，现在将 e 看作工人的效力水平. 依对 e 的信息是否完全显示，下面分两种情况考虑. 因一些类似的计算过程已经相当标准化，我们将下面的讨论处理得更概括与简略些，某些省略的细节读者不妨自行补充以作为练习.

A. e 完全显示情形

设雇主在招聘工人之际，除了开出工资 w 之外，还明确提出对工人劳动投入 e 的要求，e 可看作劳动时间、强度、工作复杂程度与工作条件等的一个综合指标. 对 e 的要求将写入合同，工人一旦承诺，就应在工作中一点不打折扣地实行，且由于完全的信息显示而得到雇主的有效监督. 工人虽不能自己提出投入 e 的水平，但他有权拒绝对于 e 的过高要求，因此，必定存在某个由市场竞争决定的阈值 e_0，一旦雇主提出的 e 高于 e_0，工人宁可失业也不会接受一份过于苛刻的合同. 必定 $e_L<e_0,\Phi(e_0)=1$. 取 y 与 π 分别依式(1)′与式(2)，因而 y 与 e 负相关，而 π 与 e 正相关. 这就决定了工人与雇主的值函数 $V(e),v(e)$ 分别为单调

减与单调增函数；$V(e) \geqslant V(e_0) = V_0, v(e) \leqslant v(e_0) (e_L \leqslant e \leqslant e_0)$，但显然不能有 $v(e_0) = v_0$. 尽管工资无差别，但劳动付出有差异，因而工人仍不免有跳槽之举. 因并不考虑工人能力的差别，故雇主没有更换工人之必要.

为计算最优值，约定

$$I = \int_{e_L}^{e_0} V(e) \mathrm{d}\Phi(e), \quad J = \int_{e_L}^{e_0} v(e) \mathrm{d}\Phi(e), \tag{42}$$

二者分别为在职工人的平均最优值与非空缺岗位的平均最优值[①]. 依熟知的计算有

$$V(e) = \frac{bV_0 + w - e + qV(e)\overline{\Phi}(e) + q\int_{e_L}^{e} V(s)\mathrm{d}\Phi(s)}{b + q + \rho},$$

$$V_0 = \frac{aI + c}{a + \rho}.$$

在第一式中取 $e = e_0$ 得 $(q + \rho)V_0 = qI - e_0 + w$；然后与后一式联立解出

$$\begin{cases} I = \dfrac{(a + \rho)(w - e_0) - c(q + \rho)}{\rho(a - q)}, \\ V_0 = \dfrac{a(w - e_0) - cq}{\rho(a - q)}. \end{cases} \tag{43}$$

类似地有

$$v(e) = \frac{Ae - w + bv_0}{b + \rho}, \quad v_0 = \frac{\eta J - \delta}{\eta + \rho}.$$

将 $v(e)$ 的表达式代入式(42)可算出

$$J = \int_{e_L}^{e_0} \frac{Ae - w + bv_0}{b + \rho} \mathrm{d}\Phi(e) = \frac{A\bar{e} - w + bv_0}{b + \rho},$$

其中 $\bar{e} = \mathrm{E}e$ 是工人的平均投入. 于是解出

$$\begin{cases} v_0 = \dfrac{\eta(A\bar{e} - w) - \delta(b + \rho)}{\rho(b + \eta + \rho)}, \\ J = \dfrac{(\eta + \rho)(A\bar{e} - w) - b\delta}{\rho(b + \eta + \rho)}. \end{cases} \tag{44}$$

结合式(42)～式(44)得出

$$\overline{V} = \frac{aI + bV_0}{a + b} = \frac{a(a + b + \rho)(w - e_0) - c(aq + a\rho + bq)}{\rho(a + b)(a - q)}, \tag{45a}$$

$$\bar{v} = \frac{\eta J + bv_0}{\eta + b} = \frac{\eta(A\bar{e} - w) - b\delta}{\rho(b + \eta)}. \tag{45b}$$

关键的问题是提出一个适当的宏观均衡条件，提法并不是唯一的. 下面提出

---

① 严格地说，此处仍应区分雇主提出的 e 的分布与在职工人实际投入 e 的分布. 为简化分析，我们将二者等同了，这当然不免造成一些误差.

的条件未必是最恰当的，但它具有某种包容性．我们假定：在宏观均衡时 $\overline{V}$ 与 $\bar{v}$ 具有某一固定比率，即 $\overline{V}/\bar{v}=\mu=\text{const}$．直观上，这意味着在均衡时雇主与工人按固定比率分配其收益．此外，仍如同4.7.2B 中一样假定均衡时 $v_0=0$，因而

$$\eta(A\bar{e}-w)=\delta(b+\rho);$$

以此代入式(45b)得 $\bar{v}=\delta/(b+\eta)$．于是可将条件 $\overline{V}=\mu\bar{v}$ 表为

$$\frac{a(a+b+\rho)(w-e_0)-c(aq+a\rho+bq)}{\rho(a+b)(a-q)}=\frac{\delta\mu}{b+\eta}.$$

由此解出

$$e_0=w-\frac{c(aq-a\rho+bq)}{a(a+b+\rho)}-\frac{\delta\mu\rho(a+b)(a-q)}{a(a+b+\rho)(b+\eta)}. \tag{46}$$

由式(46)可直接看出，e_0 与 w,η 正相关，与 c,δ,μ 负相关．

B. e 不完全显示情形

现在设工人并不对雇主显示关于 e 的完全信息，则可能出现怠工．不过失业概率 $b=b(e)$ 与 e 负相关，因而怠工招致较大的失业风险．在投入 e 已不是硬性指标的情况下，限定阈值 e_0 与工人跳槽都失去重要性，因而不予考虑．至于上段的其他设定，则仍然保持有效．

因不考虑 e_0，故应将式(42)修改为

$$I=\int_{e_L}^{e_H}V(e)\mathrm{d}\Phi(e),\quad J=\int_{e_L}^{e_H}v(e)\mathrm{d}\Phi(e). \tag{42$'$}$$

容易算出

$$\begin{cases}V(e)=\dfrac{bV_0+w-e}{b+\rho}, & V_0=\dfrac{aI+c}{a+\rho};\\[2ex] v(e)=\dfrac{bv_0+Ae-w}{b+\rho}, & v_0=\dfrac{\eta J-\delta}{\eta+\rho}.\end{cases} \tag{47}$$

将式(47)所给的 $V(e)$ 与 $v(e)$ 的表达式代入式(42)′得

$$\begin{cases}I=E[V(e)]=(1-\lambda\rho)V_0+\lambda w-\mu,\\ J=E[v(e)]=(1-\lambda\rho)v_0+A\mu-\lambda w,\end{cases} \tag{48}$$

其中

$$\lambda=\mathrm{E}\left[\frac{1}{b+\rho}\right],\quad \mu=\mathrm{E}\left[\frac{e}{b+\rho}\right]. \tag{49}$$

联立方程(47)与方程(48)解出

$$\begin{cases}I=\dfrac{(a+\rho)(\lambda w-\mu)+c(1-\lambda\rho)}{\rho(1+a\lambda)}, & V_0=\dfrac{a(\lambda w-\mu)+c}{\rho(1+a\lambda)};\\[2ex] J=\dfrac{(\eta+\rho)(A\mu-\lambda w)-\delta(1-\lambda\rho)}{\rho(1+\lambda\eta)}, & v_0=\dfrac{\eta(A\mu-\lambda w)-\delta}{\rho(1+\lambda\eta)}.\end{cases} \tag{50}$$

考虑到 b 与 e 有关使情况变得复杂，我们只有采用较简单的宏观均衡条件．以下条件可看作条件(11)的推广：

$$I - V_0 = J - v_0, \quad v_0 = 0. \tag{51}$$

结合式(50)与式(51)得出

$$\begin{cases} w = c + \dfrac{\mu}{\lambda} + \dfrac{\delta(1 + a\lambda)}{\lambda\eta}, & (52a) \\ c\lambda\eta - (A - 1)\mu\eta + \delta(2 + a\lambda) = 0. & (52b) \end{cases}$$

如同4.7.2B中一样采用匹配函数(13),则在宏观均衡时有 $M = BU^{\alpha}V^{\beta} = aU = \bar{b}L = \eta V$,其中 $\bar{b} = \mathrm{E}b$. 于是类似于式(14)有

$$a = \bar{b}L/(N - L), \quad \eta = B^{-1/\beta}(\bar{b}L)^{-\beta'/\beta}(N - L)^{\alpha/\beta}. \tag{53}$$

结合式(52)与式(53)消去 a,c,η,可将 w 表为 L 及 A,δ,λ,μ 等的函数,而不必写出其很烦琐的表达式.

4.7.7 工资与效力差异模型

现在作更一般的假定:w 与 e 都服从一定连续分布.相应地,b,q 等不再固定不变.这就使模型明显地复杂化.但若作适当简化处理,则仍能得出某些一般结论.

A. 模型描述

为确定起见,设 e 的含义依4.7.6B,即它表示工人的实际效力水平,且对雇主不显示完全信息.为适应 w 与 e 均有差异这一情况,作如下设定.

(i) 状态转换.工人可能因找到工作、失去工作与跳槽而改变状态,三种变动的概率分别为 a,b,q;岗位可能因补缺、辞退或换人而改变状态,三种变动的概率分别为 η,b,p. 假定 $a > q,\eta > p$,即跳槽与更换工人相对来说较为少见.设 b,p 与 e 有关,q 与 w 有关.

(ii) 收益与利润.设 y 与 π 分别依式(1)′与式(2),二者同时与 w,e 有关,因而最优值 V 与 v 均为 (w,e) 的函数. $V(w,e)$ 对 w 单调增、对 e 单调减,而 $v(w,e)$ 则恰好相反.

(iii) w 与 e 的分布.设厂商提供工资 w 服从连续分布 $F(w)(w_0 \leqslant w \leqslant w_H)$,$w_0$ 是工人所能接受的最低工资,$c < w_0 < w_H$. 尽管雇主可选择任何工资 $w \in [w_0, w_H]$,但对同一个岗位,工资 w 对任何求职者都一样.设在职工人效力水平 e 服从连续分布 $\Phi(e)(e_0 \leqslant e \leqslant e_H)$,$e_0$ 是工人的最低效力,若效力低于此水平,工人不可避免被解雇,这意味着 $b(e) = \infty(e \leqslant e_0)$. 为简便起见,假定工人保持一不变的效力水平 e,即使跳槽后亦如此;e 当然因人而异. w_0 与 e_0 均由模型内生地决定.为简化分析,认定

$$V(w_0, e) = V_0, \quad v(w, e_0) = v_0. \tag{54}$$

这有点简单化,因严格说来 $V(w_0,e)$ 与 $v(w,e_0)$ 仍可能分别与 e,w 有关.

模型分析的目标是:依据一定的宏观均衡条件确定 w_0 与 e_0;求出平均最优

值 $\overline{V}$ 与 $\bar{v}$；讨论这些数量指标与参数的相关性. 为不使问题过于复杂，我们设在职工人的工资分布亦为 $F(\cdot)$.

B. 最优值

首先考虑 V. 任给 $w \in [w_0, w_H], e \in [e_0, e_H]$，依通常的方法可得

$$V(w,e) = \frac{bV_0 + w - e + qQ(w,e)}{b + q + \rho},$$

其中
$$Q(w,e) = F(w)V(w,e) + \int_w^{w_H} V(s,e)\mathrm{d}F(s).$$

取 $w = w_0$，并用条件(54)得

$$(q_0 + \rho)V_0 = w_0 - e + q_0 I(e),$$

$$q_0 = q(w_0), I(e) = \int_{w_0}^{w_H} V(w,e)\mathrm{d}F(w),$$

故
$$(q_0 + \rho)V_0 = w_0 - \bar{e} + q_0 I, \tag{55}$$

其中 $\bar{e} = \mathrm{E}[e]$，约定

$$\begin{cases} I = \mathrm{E}[I(e)] = \int_{e_0}^{e_H}\int_{w_0}^{w_H} V(w,e)\mathrm{d}F(w)\mathrm{d}\Phi(e), & \text{(56a)} \\ J = \int_{e_0}^{e_H}\int_{w_0}^{w_H} v(w,e)\mathrm{d}F(w)\mathrm{d}\Phi(e). & \text{(56b)} \end{cases}$$

类似地可求得

$$V_0 = \frac{c + aI}{a + \rho}.$$

上式与方程(55)联立解出

$$\begin{cases} V_0 = \dfrac{a(w_0 - \bar{e}) - cq_0}{\rho(a - q_0)}, \\ I = \dfrac{(a + \rho)(w_0 - \bar{e}) - c(q_0 + \rho)}{\rho(a - q_0)}. \end{cases} \tag{57}$$

类似地，可求得

$$\begin{cases} (p_0 + \rho)v_0 = Ae_0 - \overline{w} + p_0 J, \\ (\eta + \rho)v_0 + \eta J - \delta, \end{cases}$$

其中 $p_0 = p(e_0), \overline{w} = \mathrm{E}[w], J$ 依式(56b). 于是解出

$$\begin{cases} v_0 = \dfrac{\eta(Ae_0 - \overline{w}) + \delta p_0}{\rho(\eta - p_0)}, \\ J = \dfrac{(\eta + \rho)(Ae_0 - \overline{w}) + \delta(p_0 + \rho)}{\rho(\eta - p_0)}. \end{cases} \tag{58}$$

C. 宏观均衡

为简单起见，仍用宏观均衡条件(51)，只是其中 I, J 现在依式(56). 结合 $v_0 = 0$ 与式(58)得

$$\eta(Ae_0 - \overline{w}) = -\delta p_0, \quad J = \delta/\eta.$$

然后用 $I - V_0 = J$ 与式(57)解出 w_0，于是得到两个阈值：

$$\begin{cases} w_0 = c + \bar{e} + \dfrac{\delta}{\eta}(a - q_0), \\ e_0 = \dfrac{1}{A}\left(\overline{w} - \dfrac{\delta p_0}{\eta}\right). \end{cases} \tag{59}$$

直接从式(59)得出以下结论：恒有 $w_0 > c + \bar{e}$，这意味着持平均劳动投入的工人即使拿最低工资，亦强于失业；w_0 与 $a, c, \delta, \bar{e}$ 正相关，与 η, q_0 负相关，而与 b, p 等无关. 这些结论与4.7.4小节比较可以互为佐证. 其次有 $Ae_0 < \overline{w}$，这表明当 e 下降至最低值 e_0 之前，厂商的利润已降为负数，只是因为缺乏完全信息，并不能断然解雇工人，直到 e 降至 e_0，厂商才毫不犹豫地作出解雇决定；e_0 与 $\overline{w}, \eta$ 正相关，与 δ, p_0 负相关，直观上这都是可以理解的.

下面考虑平均最优值. 在 b 与 e 无关的情况下，已知失业率与空位率分别为 $b/(a+b)$ 与 $b/(b+\eta)$. 以 $\bar{b} = \mathrm{E}[b]$ 代替 b，就得到目前条件下的失业率与空位率. 利用这一结论，今计算 $\overline{V}$ 与 $\bar{v}$ 如下(参照式(45))：

$$\begin{aligned} \overline{V} &= \frac{aI + \bar{b}V_0}{a + \bar{b}} \\ &= \frac{a(a + \bar{b} + \rho)(w_0 - \bar{e}) - c(aq_0 + a\rho + \bar{b}q_0)}{\rho(a + \bar{b})(a - q_0)} \qquad \text{(用式(57))} \\ &= \frac{c}{\rho} + \frac{a\delta}{\eta}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{a + \bar{b}}\right), \qquad \text{(用式(59))} \\ \bar{v} &= \frac{\delta}{\bar{b} + \eta}. \qquad \text{(用式(51)、式(58))} \end{aligned}$$

由此可直接看出：$\overline{V}$ 与 a, c, δ 正相关，与 $\bar{b}, \eta, \rho$ 负相关；$\bar{v}$ 与 δ 正相关，与 $\bar{b}, \eta$ 负相关. 值得注意的是，在倾向于降低 $\bar{b}$ 与 η 这一点上，工人与雇主是一致的. 直观上，降低平均失业概率有利于工人群体，是理所当然的. 但减少空位补缺机会也有利于工人群体，则未必是明显的.

4.7.8 连续轨道模型

迄今所考虑的就业模型有一共同特点：其状态变量并非时间的连续函数，因而不能使用本章他处作为主要工具的微分方程来描述，这就失去了一个强有力的数学方法. 为弥补这一缺陷，必须将状态变量连续化. 有多种方法作到这一点，下面考虑的方法主要借鉴Shi与Wen(1997)的工作，其基本思想是将工人就业率当作一个主要变量，通过最优决策分析考虑它的连续轨道.

A. 工人决策

以 x 记一个代表性工人的就业率，$u = 1 - x$ 就是失业率. 无论就业或失业，

工人都要付出一定成本，因而带来负效用．这样，工人的效用可表为

$$U(c)-\xi x-\gamma u,$$

其中 c 是消费，$U(\cdot)$ 是通常的效用函数，ξ,γ 是正参数．就业工人数 L 服从如下增长方程：

$$\dot{L}=aU-bL,$$

其中 U 是失业人数，a 是时变的，将由模型内生地决定；$b>0$ 是外生常数．因不考虑人口增长，不妨将工人总数标准化为1，因而宏观地有 $x=L,u=U$，于是

$$\dot{x}=au-bx.$$

工人的资本积累服从如下动态预算约束：

$$\dot{k}=rk+wx+\pi-c,$$

其中 k 是资本存量，它全部租给厂商，获得利息收入 rk；wx 是期望工资收入；π 是工人从其股权中分得的利润．r,w,π 都是时变的，对于工人是给定的，但最终将由模型内生地决定．

x 与 k 都是工人无法选择的状态变量．但工人可以选择消费 c，为此必须解如下最优化问题：

$$\begin{cases}\max\limits_{c}\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\rho t}[U(c(t))-\xi x(t)-\gamma u(t)]\mathrm{d}t, & (60\mathrm{a})\\ \text{s.t.}\quad \dot{x}=au-bx, & (60\mathrm{b})\\ \qquad\ \ \dot{k}=rk+wx+\pi-c. & (60\mathrm{c})\end{cases}$$

式(60)是一个以 c 为控制变量、x 与 k 为状态变量的确定性最优化问题．为求出其最优性条件，作Hamilton 函数(依3.3.1E)

$$H=U(c)-\xi x-\gamma u+\lambda(au-bx)+\theta(rk+wx+\pi-c).$$

于是可写出问题(60)的最优性条件：

$$\begin{cases}\partial H/\partial c=U'(c)-\theta=0, & (61\mathrm{a})\\ \partial H/\partial x=\gamma-\xi-\lambda(a+b)+\theta w=\rho\lambda-\dot{\lambda}, & (61\mathrm{b})\\ \partial H/\partial k=\theta r=\rho\,\theta-\dot{\theta}. & (61\mathrm{c})\end{cases}$$

由式(61a)得 $\theta=U'(c)$，因而 $g_\theta\triangleq\dot{\theta}/\theta=-\sigma g_c,\sigma=-cU''(c)/U(c)$ 是由 $U(\cdot)$ 决定的相对风险厌恶系数，当 $U(\cdot)$ 是CRRA 效用函数时 σ 是常数(参看3.3节式(32))．由式(61c)有 $g_\theta=\rho-r$．结合式(60b)、式(60c)与式(61)，得到关于 (x,k,c,λ) 的如下微分方程组：

$$\begin{cases}\dot{x}=au-bx, & (62\mathrm{a})\\ \dot{k}=rk+wx+\pi-c, & (62\mathrm{b})\\ \dot{c}=\sigma^{-1}c(r-\rho), & (62\mathrm{c})\\ \dot{\lambda}=(a+b+\rho)\lambda-wU'(c)+\xi-\gamma. & (62\mathrm{d})\end{cases}$$

因 r,π,w 等并未确定，现在不宜展开对于系统(62)的独立分析．下面转向考虑

厂商决策.

B. 厂商决策

为简便起见,假定厂商总数恰等于工人总数,因而亦标准化为1. 这一看似不合理的假定其实并不实质性地影响模型结论. 平均来说,一个厂商正好租到一个工人的资本,一个工人正好分得一个厂商的全部利润. 这样,系统(62)中的 k 与 π 现在成为代表性厂商的资本投入与利润. 对厂商来说有

$$\pi = y - rk - wx - \delta v, \tag{63}$$

其中 $y = Ak^{\alpha}x^{\alpha'}(A > 0, 0 < \alpha < 1)$ 是产出, x 理解为厂商雇用工人数; rk 与 wx 分别为资本与劳动成本, δv 是维持 v 个岗位的成本. 依现在的记号,熟知的平衡方程 $aU = \eta V$ 变成 $au = \eta v$, η 如同 a 一样也是时变的. k, r, w, x 都不是厂商所能选择的,但厂商可以选择设置岗位数 v. 于是,厂商决策问题可表为

$$\begin{cases} \max\limits_{v} \int_0^{\infty} e^{-R(t)}\pi(t)dt, \quad (\pi \text{ 依式}(63)), & (64a) \\ \text{s.t.} \quad \dot{x} = \eta v - bx, & (64b) \end{cases}$$

其中
$$R(t) = \int_0^t r(\tau)d\tau.$$

作 Hamilton 函数

$$h = y - rk - wx - \delta v + \mu(\eta v - bx),$$

则可写出问题(64)的最优性条件:

$$\begin{cases} \partial h/\partial v = -\delta + \mu\eta = 0, \\ \partial h/\partial x = y_x - w - b\mu = \mu r - \dot{\mu}; \end{cases}$$

这得出 $\eta = \delta/\mu$,

$$\dot{\mu} = (b + r)\mu - (y_x - w). \tag{65}$$

由 $\partial\pi/\partial k = 0$ 有 $r = y_k = A\alpha(x/k)^{\alpha'}$. 但因劳务市场并非Walras 市场,未必有 $w = y_x$, 即方程(65)等号右端第二项未必为零. 注意方程(65)与方程(62d)互成对应: λ 与 μ 可分别看作就业对于工人与厂商的影子价格,而 $y_x - w$ 与 $wU'(c) - \xi + \gamma$ 则可分别看作工人收益与厂商利润的溢价. 依据所谓**Nash 协议**,工资 w 将如此确定,使得对某个权数 $s \in (0,1)$,

$$(y_x - w)^s(wU'(c) - \xi + r)^{s'}$$

达到最大;这等价于使

$$s\ln(y_x - w) + s'\ln[wU'(c) - \xi + r]$$

达到最大. 由此最大化问题的微分条件,得到

$$w = sy_x + s'(\xi - \gamma)/U'(c). \tag{66}$$

C. 均衡

令方程组(62)及式(65)右端为零,得到

$$\begin{cases} au - bx = 0, & (67a) \\ y - \delta v - c = 0, \quad (\text{已用式}(63)) & (67b) \\ r = A\alpha(x/k)^{\alpha'} = \rho, & (67c) \\ \delta\eta^{-1}(b+\rho) - y_x + w = 0, \quad (\text{用 } r=\rho, \mu=\delta/\eta) & (67d) \end{cases}$$

其中 w 依式(66). 以上4个方程联系着有待确定的6个变量：a,c,k,η,v,x. 需补进的条件基于平衡方程 $au = M = \eta v$，其中匹配数 M 依(对照式(13))

$$M = Bu^{\beta}v^{\beta'}, \quad B > 0, \quad 0 < \beta < 1.$$

这就得出

$$a = B(v/u)^{\beta'}, \quad \eta = B(u/v)^{\beta}. \tag{68}$$

联立方程(67)与方程(68)已可完全确定所需的6个均衡值. 首先从方程(67c)解出

$$x/k = (\rho/A\alpha)^{1/\alpha'} \triangleq \omega,$$

即

$$x = \omega k. \tag{69}$$

其次结合方程(67a)与方程(68)得出

$$v = \left[\frac{bx}{B(1-x)}\right]^{1/\beta'} \triangleq v(x), \tag{70}$$

$$a = \frac{bx}{1-x}, \quad \eta = B^{1/\beta'}\left(\frac{1-x}{bx}\right)^{\beta/\beta'}. \tag{71}$$

由方程(67b)得

$$c = A\omega^{-\alpha}x - \delta v(x) \triangleq c(x). \tag{72}$$

将式(69)～式(72)代入式(67d)得到一个关于 x 的方程

$$\delta(b+\rho)\left(\frac{b^{\beta}}{B}\right)^{1/\beta'}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\beta/\beta'} + \frac{s'(\xi-\gamma)}{U'(c)} = A^{1/\alpha'}\alpha's'\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{\alpha/\alpha'}. \tag{73}$$

以 $\varphi(\cdot)$ 记上式等号之左端，则

$$\varphi'(x) = \frac{\beta\delta(b+\rho)}{\beta'}\left(\frac{b^{\beta}}{B}\right)^{1/\beta'}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{\beta}{\beta'}-1}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{s'(\gamma-\xi)}{U'^2(c)}U''(c)c'(x).$$

设 $x > 0$ 充分接近于1，则由式(70)知 $v'(x)$ 充分大；由式(72)知 $c'(x) < 0$. 设 $\gamma > \xi$，则当 x 充分接近于1时 $\varphi'(x) > 0$，而 $\varphi(x)$ 充分大. 另一方面，不妨设 $U'(0) = \infty$，于是 $\varphi(0) = 0$. 因此方程(73)必有一解 $x \in (0,1)$，它就是所要求的均衡就业率，然后由方程(69)～方程(72)得出 k,v,a,η,c 的均衡值.

现在研究与参数的相关性. 最使人感兴趣的是调节工人与雇主利益分配的参数 s. 方程(73)两端对 s 求导得

$$\varphi'(x)\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\xi-\gamma}{U'(c)} - A^{1/\alpha'}\alpha'\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{\alpha/\alpha'}.$$

设 $\xi < \gamma$，则上式右端为负；通常有 $x \approx 1$，因而 $\varphi'(x) > 0$，故 $\partial x/\partial s < 0$. 这就得出：若失业所带来的负效用更甚于就业的劳苦（即 $\xi < \gamma$），则就业率与 s 负相

关,即加大对工人利益的倾斜会降低就业率.这似乎是一个出人意外的结论.

参考文献

[1] Abraham K G, Katz L F. Cyclical unemployment: sectoral shifts or aggregate disturbances[J]? J. Political Eco., 1986, 94:507-522.

[2] Akerlof G A, Main B G M. An experience-weighted measure of employment and unemployment durations[J]. Amer. Eco. Rev., 1981, 71:1003-1011.

[3] Akerlof G A, Yellen J L. The fair wage-effort hypothesis and unemployment[J]. Q. J. Eco., 1990, 105:255-283.

[4] Albrecht J, Axell B. An equilibrium model of search unemployment[J]. J. Political Eco., 1984, 92:824-840.

[5] Alexopoulos M. Unemployment and the business cycle[J]. J. Monetary Eco., 2004, 51:277-298.

[6] Azariadis C. Implicit contracts and underemployment equilibrium[J]. J. Political Eco., 1975, 83:1183-1202.

[7] Azariadis C, Stiglitz J E. Implicit contracts and fixed-price equilibria[J]. Q. J. Eco., 1983, 98(supp):1-22.

[8] Beaudry P, DiNardo J. The effect of implicit contracts on the movement of wages over the business cycle[J]. J. Political Eco., 1991, 99:665-688.

[9] Bils M J. Testing for contracting effects on employment[J]. Q. J. Eco., 1991, 106:1129-1156.

[10] Boone J, Bovenberg L. Optimal labour taxation and search[J]. J. Publ. Eco., 2002, 85:53-97.

[11] Brainard S L, Cutler D M. Sectoral shifts and cyclical unemployment reconsidered[J]. Q. J. Eco., 1993, 108:219-243.

[12] Bulow J, Summers L H. A theory of dual labor markets with applications to industrial policy, discrimination and Keynesian unemployment[J]. J. Labor Eco., 1986, 4:376-414.

[13] Burdett K, Mortensen D T. Wage differentials, employer size and unemployment[J]. Intern. Eco. Rev., 1998, 39:257-273.

[14] Card D. Unexpected inflation, real wage and employment determination in union contracts[J]. Amer. Eco. Rev., 1990, 80:669-688.

[15] Carmichael L. Can unemployment be involuntary[J]? Amer. Eco. Rev., 1985, 75:1213-1214.

[16] Davis S J, Haltiwager J. Gross job creation, gross job destruction and employment reallocation[J]. Q. J. Eco., 1992, 107:819-863.

[17] Diamond P A. Mobility costs, frictional unemployment and efficiency [J]. J. Political Eco., 1981, 89:798-812.

[18] Gibbons R, Katz L. Does unmeasured ability explain inter-industry wage differentials[J]? Rev. Eco. Studies, 1992, 59:515-535.

[19] Goerke L. On the structure of unemployment benefits in shirking models[J]. Labour Eco., 2000, 7:283-295.

[20] Gottfries N. Insiders, outsiders and nominal wage contracts[J]. J. Political Eco., 1992, 100:252-270.

[21] Hart O. Optimal labour contracts under asymmetric information[J]. Rev. Eco. Studies, 1983, 50:3-35.

[22] Hosios A J. On the efficiency of matching and related models of search and unemployment[J]. Rev. Eco. Studies, 1990, 57:279-298.

[23] Kimball M S. Labour-market dynamics when unemployment is a worker discipline device[J]. Amer. Eco. Rev., 1994, 84:1045-1059.

[24] Krueger A B, Summers L H. Efficiency wages and the interindustry wage structure[J]. Econometria, 1988, 56:259-293.

[25] Lindbeck A, Snower D. Wage setting, unemployment and insider outsider relations[J]. Amer. Eco. Rev., 1986, 76:235-239.

[26] Merz M. Search in the labor market and the real business cycle[J]. J. Monetary Eco., 1995, 36:269-300.

[27] Pissarides C A. Short-run dynamics of unemployment, vacancies and real wages[J]. Amer. Eco. Rev., 1985, 75:676-690.

[28] Pisauro G. The beneficial effects of generous unemployment benefits on profits and employment[J]. European J. Political Eco., 2002, 18:739-760.

[29] Potel-Vinay P. Transitional dynamics of the search model with endogenous growth[J]. J. Eco. Dyn. Control, 1998, 22:1091-1115.

[30] Rogerson R, Wright R. Involuntary unemployment in economies with efficient risk sharing[J]. J. Monetary Eco., 1988, 22:501-515.

[31] Shaked A, Sutton J. Involuntary unemployment as a perfect equilibrium in a bargaining model[J]. Econometrica, 1984, 52:1351-

1364.

[32] Shapiro C, Stiglitz J E. Equilibrium unemployment as a worker discipline device[J]. Amer. Eco. Rev., 1984, 74:433-444.

[33] Shi S, Wen Q. Labor market search and capital accumulation: some analytical results[J]. J. Eco. Dyn. Control, 1997, 21:1747-1776.

[34] Shi S, Wen Q. Labor market search and the dynamic effects of taxes and subsiders[J]. J. Monetary Eco., 1999, 43:457-495.

[35] Solow R M. Insiders and outsiders in wage determination[J]. Scand. J. Eco., 1985, 87:411-428.

[36] Summers L H. Relative wages, efficiency wages and Keynesian unemployment[J]. Amer. Eco. Rev., 1988, 78:383-388.

[37] Topel R H, Word M P. Job mobility and the careers of young men[J]. Q. J. Eco., 1992,439-479.

[38] Woglom G. Unemployment equilibrium with rational expectations[J]. Q. J. Eco., 1982, 97:89-107.

[39] Yellen J L. Efficiency wage models of unemployment[J]. Amer. Eco. Rev., 1984,200-205.

4.8 其他问题

在前面几节中,我们相继将宏观经济的基本问题——消费、公共开支、投资、货币与就业等——纳入到或多或少已标准化的随机最优决策模型的框架之内,并获得了相应的结论.这些结果表明,我们所选择的分析方法是有效的,甚至可以说是强有力的.然而,已涉及的内容并非值得关注的宏观经济问题的全部,还有许多其他问题同样吸引着人们的注意.而且,随着经济与社会的发展,必将涌现出更多新的课题.现有的方法在新的挑战面前必须接受检验,且随时得到修正与补充.可惜,本书中我们已没有太多的发挥余地了.在这最后的一节中,只能列举几个似乎互不相属的问题,以作为范围广泛的"其他问题"的代表.

4.8.1 环境污染与治理

环保问题在当代世界已变得如此严重,对于人类未来的担忧,已不再只是少数环保人士的绝望呼号了.环保问题进入经济学论题之内,是理所当然的.环境污染对于福利与生产都有负面影响,是不容置疑的.但这种影响的程度(或人们认知的程度)及其描述都不简单.环保投资必然耗费一定成本,而其效果未必十

分确定；环保主要依靠公共设施还是私人投资，也值得讨论. 鉴于上述种种复杂性，一个有效的环保模型必然要顾及多种不可忽视的因素，不会很简单. 下面给出的模型实际上已算相当简化的了，但它也足以说明一些问题.

A. 模型与最优性条件

以 P 记环境的污染水平，它是一个涉及空气、水质及其他人居条件的综合指标，其计量与测定都不会很简单，但其具体界定方法并不影响下面的理论分析，因而不在我们的讨论范围之内. P 对个体福利的负面影响体现于如下期望折现效用公式：

$$V = \mathrm{E}_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}U(c(t)P^{-\theta}(t))\mathrm{d}t,$$

其中 $U(\cdot)$ 是有参数 $\sigma > 1$ 的CRRA 效用函数（约定本节中皆如此），$\theta(>0)$ 是表征 P 的负福利效用的权数，θ 愈大，个体愈敏感于污染之为害. 在一定的技术条件下，P 通常与生产规模成正比，而技术进步通常则减少污染. 在一种简化形式下，可设 $P = Y/X$，X 表示环保技术水平. 假定技术开发既依赖于私人投资也依赖于政府公共开支 $G = gK$，且可表为如下公式：

$$X = (\varepsilon k)^{\delta}G^{\delta'},\quad P = Y(\varepsilon k)^{-\delta}G^{-\delta'}, \tag{1}$$

其中 εk 表示个体的环保投资，ε 与 g 都是外生正参数①；$\delta \in [0,1]$ 是外部性指标，δ 越大，环保技术进步越依赖于私人投资.

环境污染对于生产的直接影响是一个复杂的问题. 水与土地的污染通常严重地影响到农业的产出. 冶炼行业与能源部门排放大量有害气体造成公害，而对其自身产出则未必有明显影响. 平均地考虑，可设个体的生产函数为

$$y = Ak(\varepsilon' - \theta_1 P), \tag{2}$$

式(2)表明由于污染存在，应从生产的资本投入 $\varepsilon' k$ 中扣除损失 $\theta_1 Pk$（$\theta_1 > 0$ 是表征污染负生产效应的权重）.

如同在4.2.3 小节中一样设 $k = \nu w, b = \nu' w$，则

$$\mathrm{d}k = \mathrm{d}y - (c + \varepsilon k)\mathrm{d}t - \mathrm{d}G,$$

$$\mathrm{d}b = b\mathrm{d}R_b + \mathrm{d}G - \mathrm{d}T,$$

其中 $\mathrm{d}y, \mathrm{d}G, \mathrm{d}R_b, \mathrm{d}T$ 依4.2 节式(30)、式(37)，但设 $\tau_1 = \omega = 0$，这样可以简化分析. 于是

$$\begin{cases}\mathrm{d}k = (y - c - \varepsilon k - gK)\mathrm{d}t + y\mathrm{d}u_Y - Y\mathrm{d}u_G,\\ \mathrm{d}b = (gK - \tau y + br)\mathrm{d}t + b\mathrm{d}u_B + Y\mathrm{d}u_G.\end{cases} \tag{3}$$

---

① 这只是为了简化分析. 在一个更精细的模型中，ε 应当成为决策者的选择变量.

形式上，式(3)与4.3节式(8)完全一致[①]，只是现在 y 依式(2). 如同4.2.3小节中一样，仍设 du_Y 与 du_G 互不相关. 于是个体决策问题可表为

$$\begin{cases} \max\limits_{c,\nu} \mathrm{E}_0\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho t}U(c(t)P^{-\theta}(t))\mathrm{d}t, & (4a) \\ \text{s.t.} \quad \mathrm{d}w = (\tau' y - c - \varepsilon k + br)\mathrm{d}t + w\mathrm{d}u, \quad w(0) = w_0, & (4b) \end{cases}$$

其中

$$\mathrm{d}u = \nu' \mathrm{d}u_B + (y/w)\mathrm{d}u_Y. \tag{5}$$

利用式(1)、式(2)算出

$$\frac{\partial P}{\partial \nu} = -\frac{\delta P}{\nu}, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu} = Aw(\varepsilon' - \delta'\theta_1 P);$$

$$\frac{\partial P}{w} = -\frac{\delta P}{w}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = A\nu(\varepsilon' - \delta'\theta_1 P).$$

利用上述结果，如通常一样易得出问题(4)的最优性条件为

$$\begin{cases} U'(cP^{-\theta})P^{-\theta} = V_w, & (6a) \\ \left[\dfrac{\mu\delta\theta}{\nu} + A\tau'(\varepsilon' - \delta'\theta_1 P) - \varepsilon - r\right]V_w + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \sigma_u^2}{\partial \nu}wV_{ww} = 0, & (6b) \\ [\mu\delta\theta + A\nu\tau'(\varepsilon' - \delta'\theta_1 P) - \varepsilon\nu + \nu' r - \rho]V_w + V_{tw} & \\ \quad + \left(\dfrac{\tau' y}{w} - \mu - \varepsilon\nu + \nu' r + \sigma_u^2 + \dfrac{w}{2}\dfrac{\partial \sigma_u^2}{\partial w}\right)wV_{ww} + \dfrac{\sigma_u^2}{2}w^2 V_{www} = 0, & (6c) \end{cases}$$

其中 $\mu = c/w$，

$$\sigma_u^2 = \nu'^2\sigma_B^2 + 2\nu'(y/w)\sigma_{BY} + (y/w)^2\sigma_Y^2; \qquad \text{（依式(5)）}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \sigma_u^2}{\partial \nu} = -\nu'\sigma_B^2 - \dfrac{y}{w}\sigma_{BY} + A(\varepsilon' - \delta'\theta_1 P)\left(\nu'\sigma_{BY} + \dfrac{y}{w}\sigma_Y^2\right), \\ \dfrac{w}{2}\dfrac{\partial \sigma_u^2}{\partial w} = -\dfrac{\nu' y}{w}\sigma_{BY} - \left(\dfrac{y}{w}\right)^2\sigma_Y^2 + A\nu(\varepsilon' - \delta'\theta_1 P)\left(\nu'\sigma_{BY} + \dfrac{y}{w}\sigma_Y^2\right). \end{cases} \tag{7}$$

B. 宏观均衡

依照我们已熟知的程序，设在宏观均衡时 $k = K, y = Y, \mu, \nu$ 为常数，$V = aU(w)$，且 $\mathrm{d}k/k = \mathrm{d}b/b$. 于是由式(1)、式(2)得出

$$\begin{cases} P = B\varepsilon^{-\delta}g^{-\delta'}, \quad y = Bk, \\ B = A\varepsilon'/(1 + A\theta_1\varepsilon^{-\delta}g^{-\delta'}), \end{cases} \tag{8}$$

可见均衡时 P 为常数. 结合 $V = aU(w)$ 与条件(6a)得

$$a = \mu^{-\sigma}P^{-\theta\sigma} = \mu^{-\sigma}(\varepsilon^{\delta}g^{\delta'}/B)^{\theta\sigma}. \qquad \text{（用式(8)）} \tag{9}$$

结合式(3)与条件 $\mathrm{d}k/k = \mathrm{d}b/b$ 得

---

① 如在4.3节中已指出的，关于 k,b 的平衡方程只在宏观均衡的条件下适用. 不过，由式(3)中两式相加得出的方程(4b)是一个体预算约束条件.

$$\begin{cases} \psi = B - g - \varepsilon - \dfrac{\mu}{\nu} = r + \dfrac{\nu}{\nu'}(g - B\tau), & (10a) \\ \mathrm{d}u = B(\mathrm{d}u_Y - \mathrm{d}u_G) = \mathrm{d}u_B + \dfrac{B\nu}{\nu'}\mathrm{d}u_G, & (10b) \end{cases}$$

其中 ψ 为均衡增长率. 由式(10b)推出

$$\begin{cases} \nu'^2\sigma_B^2 = B^2(\sigma_G^2 + \nu'^2\sigma_Y^2), \\ \sigma_{BY} = B\sigma_Y^2, \\ \sigma_u^2 = B^2(\sigma_G^2 + \sigma_Y^2) \triangleq B^2\sigma_0^2. \end{cases}$$

将以上结果代入式(7),经整理后得

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial\nu} = -\dfrac{B^2\sigma_G^2}{\nu'} - B(B - B_1)\sigma_Y^2, \\ \dfrac{w}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial w} = -B(B - B_1)\nu\,\sigma_Y^2, \end{cases} \qquad (7)'$$

其中

$$B_1 = A(\varepsilon' - \delta'\theta_1 P) = A(\varepsilon' - B\delta'\theta_1\varepsilon^{-\delta}g^{-\delta'}). \qquad (11)$$

为方便起见,如同在4.3节中一样约定如下记号:

$$\lambda = \tau' - B\sigma\sigma_Y^2, \quad \xi = 1 + \delta\theta, \quad \phi = \lambda(B - B_1), \quad Z = \sigma + \delta\theta. \qquad (12)$$

作了上述准备之后,现在已可由式(6b)、式(6c)与式(10a)依次得出

$$\nu' r = \mu\delta\theta(\nu'/\nu) + \nu'(B_1\tau' - \varepsilon) + B^2\sigma\,\sigma_G^2 + B(B - B_1)\nu'\sigma\sigma_Y^2;$$

$$\begin{cases} \mu(\xi\sigma\nu + \delta\theta\sigma') = \nu(M + \sigma\phi\nu), \\ M = \rho + \varepsilon\sigma' - B_1\lambda\sigma' - \dfrac{1}{2}B^2\sigma\,\sigma'\sigma_0^2; \end{cases} \qquad (13)$$

$$\begin{cases} \mu\xi\nu' = \nu(N - \phi\nu), \\ N = B - g - B_1\lambda - B^2\sigma\,\sigma_0^2. \end{cases} \qquad (14)$$

联立方程组(13)与方程组(14)解出

$$\begin{cases} \mu = D\nu/Z = DE/FZ, \quad \nu = E/F, \\ D = M + \sigma N, \quad E = \xi M - \delta\theta\sigma' N, \quad F = \xi D - \phi Z. \end{cases} \qquad (15)$$

以 $\mu/\nu = D/Z$ 代入式(10a)得

$$\psi = B - g - \varepsilon - Z^{-1}(M + \sigma N). \qquad (16)$$

为保证 $\mu,\nu > 0$, 只需

$$D > 0, \quad E > 0, \quad F > 0. \qquad (17)$$

下面总设这一条件已经满足. 这就完成了主要均衡值 μ,ν,ψ 的计算.

C. τ 与 ε 的作用

令 $V = V(w_0) = aU(k_0/\nu)$, 则结合式(9)与式(15)易算出

$$-\ln(\sigma'V) = \sigma\ln D + \ln E - \ln F + \theta\sigma'\ln(B/\varepsilon^{\delta}g^{\delta'}) - \ln(k_0^{\sigma'}Z^{\sigma}) \triangleq Q. \qquad (18)$$

对于任何模型参数 s，可通过计算 $\frac{\partial\psi}{\partial s}$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial s}$ 来判定 s 对于增长与福利的影响. 依据 4.2 节中的经验，为简化 $\frac{\partial\psi}{\partial s}$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial s}$ 的计算，应考虑某些极端情况.

设 $\theta = \theta_1 = \sigma_0^2 = 0$，则

$$B = B_1 = A\varepsilon', \quad \frac{\partial B}{\partial\tau} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial\varepsilon} = -A; \qquad \text{(用式(8)、式(11))}$$

$$\lambda = \tau', \quad \xi = 1, \quad \phi = 0, \quad Z = \sigma; \qquad \text{(用式(12))}$$

$$M = \rho + \varepsilon\sigma' - B\sigma'\tau' = E,$$

$$\frac{\partial M}{\partial\tau} = B\sigma', \quad \frac{\partial M}{\partial\varepsilon} = \sigma'(A\tau' + 1); \qquad \text{(用式(13)、式(15))}$$

$$N = B\tau - g, \quad \frac{\partial N}{\partial\tau} = B, \quad \frac{\partial N}{\partial\varepsilon} = -A\tau; \qquad \text{(用式(14))}$$

$$D = F, \quad \frac{\partial D}{\partial\tau} = B, \quad \frac{\partial D}{\partial\varepsilon} = \overline{A}\sigma' - A\tau; \qquad \text{(用式(15))}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial D}{\partial\tau} = -\frac{B}{\sigma} < 0, \qquad \text{(用式(16))}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial B}{\partial\varepsilon} - 1 - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial D}{\partial\varepsilon} = -\frac{A\tau' + 1}{\sigma} < 0;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\tau} = \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial\tau} - \frac{\sigma'}{D}\frac{\partial D}{\partial\tau} = \frac{B\sigma'}{DM}(D - M), \qquad \text{(用式(18))}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\varepsilon} = \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial\varepsilon} - \frac{\sigma'}{M}\frac{\partial D}{\partial\varepsilon} = \frac{\sigma'}{DM}[D(A\tau' + 1) - M(\overline{A}\sigma' - A\tau)];$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\tau^2} = -\left(\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial\tau}\right)^2 + \sigma'\left(\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial\tau}\right)^2 < 0,$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\varepsilon^2} = -\left(\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial\varepsilon}\right)^2 + \sigma'\left(\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial\varepsilon}\right)^2 < 0.$$

以上结果表明，均衡增长率 ψ 总与 τ,ε 负相关；若方程 $\partial Q/\partial\tau = 0$ 有唯一解 $\tau = \tau^*$，则 τ^* 是使 V 达到最大的最优税率；若 $\partial Q/\partial\varepsilon = 0$ 有唯一解 $\varepsilon = \varepsilon^*$，则 ε^* 是使 V 达到最大的个体最优环保投资比率. 显然 $\partial Q/\partial\tau = 0 \Leftrightarrow D = M \Leftrightarrow N = 0$；方程 $N = 0$ 有唯一解

$$\tau^* = \frac{g}{B} = \frac{g}{A\varepsilon'}.$$

方程 $\partial Q/\partial\varepsilon = 0$ 相当于 $D(A\tau' + 1) = M(\overline{A}\sigma' - A\tau)$，即

$$\overline{A}M + (A\tau' + 1)N = 0,$$

由此唯一地解出

$$\varepsilon^* = \frac{\overline{A}(\rho - A\sigma'\tau') + (A\tau' + 1)(A\tau - g)}{(A\tau' + 1)(A\tau - \overline{A}\sigma')}.$$

因通常公共开支不至于大大超过税收，从而 $g \leqslant A\tau$ 或者 $(g - A\tau)$ 偏小[①]，故不妨设 $\varepsilon^* > 0$.

综上，得到如下结论.

命题 设以下条件满足：

(i) 个体对污染不敏感(这意味着 θ 偏小)；

(ii) 污染对于生产仅有轻度损害(这意味着 θ_1 偏小)；

(iii) 产出与公共开支的波动不明显(即 σ_0^2 偏小)，

则存在最优税率 τ^* 与个体最优环保投资比率 ε^*；当 $0<\tau<\tau^*$ (或 $0<\varepsilon<\varepsilon^*$) 时，提高税收(或个体环保投资)有益于福利但有损于增长；过高的税收或过高的私人环保投入对于福利与增长均无好处.

值得注意的是，本段求出的 $\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial Q}{\partial \tau}$ 在形式上与 4.3.1C 中的结果完全一样. 这就自然得出结论：在以上命题的条件下，若 τ 不过于超过 ε，$B\tau$ 不过于超过 g，则 ε 与 τ 相比，V 更敏感于 τ 的变化，ψ 更敏感于 ε 的变化. 因而，福利主义者更关注税收，而增长至上论者则更关注私人环保投资.

D. g 与 δ 的作用

考虑到污染 P 强烈地依赖于 g,δ，从式(2)看来，在分析 g 与 δ 的作用时不宜置 $\theta_1 = 0$. 这使得对 g,δ 的讨论(与 τ,ε 比较)方法与结论均略有不同.

首先考虑 g 的作用. 设 $\theta = \sigma_0^2 = 0, \delta = 1$，则

$$\lambda = \tau', \quad \xi = 1, \quad Z = \sigma;$$

$$B = \frac{A\varepsilon\varepsilon'}{A\theta_1 + \varepsilon}, \quad \frac{\partial B}{\partial g} = 0; \quad B_1 = A\varepsilon', \quad \frac{\partial B_1}{\partial g} = 0; \qquad (\text{用式(8)、式(11)})$$

$$\frac{\partial M}{\partial g} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial g} = -1; \qquad (\text{用式(13)、式(14)})$$

$$\frac{\partial D}{\partial g} = -\sigma = \frac{\partial F}{\partial g}, \quad \frac{\partial E}{\partial g} = 0; \qquad (\text{用式(15)})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial g} = -1 - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial D}{\partial g} = 0; \qquad (\text{用式(16)})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial g} = \frac{\sigma}{D}\frac{\partial D}{\partial g} - \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial g} = \frac{\sigma}{DF}(D - \sigma F) < 0. \qquad (\text{用式(17)、式(18)})$$

这就得出以下结论.

命题 设以下条件满足：

(i) 个体对环境污染不敏感；

(ii) 产出与公共开支的波动不明显；

① 参看 p.284、p.285 之脚注.

(iii) 环保技术进步主要依靠私人投资(这意味着 $\delta \approx 1$),

则提高对环保的公共投入有损于福利,但对增长并无明显影响.

其次考虑 δ 的作用. 设 $\theta = \sigma_0^2 = 0, g - \varepsilon \geqslant B\tau$, 则

$$B = \frac{A\varepsilon\varepsilon'}{A\theta_1 + \varepsilon}, \quad \frac{\partial B}{\partial \delta} = 0; \qquad \text{(用式(8))}$$

$$B_1 = A(\varepsilon' - B\delta'\theta_1\varepsilon^{-1}), \quad \frac{\partial B_1}{\partial \delta} = AB\theta_1\varepsilon^{-1}; \qquad \text{(用式(11))}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \delta} = -B_{1\delta}\sigma'\tau', \quad \frac{\partial N}{\partial \delta} = -\tau'\frac{\partial B_1}{\partial \delta}; \qquad \text{(用式(13)、式(14))}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \delta} = \frac{\partial N}{\partial \delta}, \quad E = M; \qquad \text{(用式(15))}$$

$$F = D - \sigma\phi, \quad \frac{\partial F}{\partial \delta} = \frac{\partial M}{\partial \delta};$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \delta} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial D}{\partial \delta} > 0; \qquad \text{(用式(16))}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial \delta} &= \frac{\sigma}{D}\frac{\partial D}{\partial \delta} + \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial \delta} - \frac{1}{F}\frac{\partial M}{\partial \delta} \qquad \text{(用式(18))}\\ &= \frac{\sigma}{D}\frac{\partial D}{\partial \delta} - \frac{M - F}{FM}\frac{\partial M}{\partial \delta}\\ &= \frac{\sigma}{D}\frac{\partial D}{\partial \delta} - \frac{\sigma(\phi - N)}{FM}\frac{\partial M}{\partial \delta}\\ &= -\frac{\sigma\tau'}{D}\frac{\partial B_1}{\partial \delta} + \frac{\sigma\sigma'\tau'(g - B\tau)}{FM}\frac{\partial B_1}{\partial \delta} < 0. \qquad \text{(用式(17))}\end{aligned}$$

于是我们有以下结论.

命题 设以下条件满足:

(i) 个体对环境污染不敏感;

(ii) 产出与公共开支波动均不明显;

(iii) 政府与私人环保投资比率互相接近(即 $g \approx \varepsilon$);

(iv) 公共开支接近或超过税收收入,

则参数 δ 对于福利与增长有相反的影响:提高 δ(即提高个体对环保技术进步的贡献份额)有损于福利但有利于增长.

4.8.2 生育与寿命

至此为止所考虑的模型都没有涉及人口增长,而实际上人口构成及其变化对于经济有显著影响;生育与寿命问题既与福利有关,也影响到产出,这些因素都应在一个适当的模型中予以考虑.

A. 模型与最优性条件

消费决策的主体实际上是由利他主义纽带连结在一起的家庭. 尽管现代家

庭已不那么重视人丁兴旺了，但平均地说，生育仍然是人们快乐的源泉，这就应将生育率 n 在某种程度上纳入效用函数. 采用一种熟悉的形式，令

$$V = \mathrm{E}_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t} U(c(t)n^\theta(t))\mathrm{d}t,$$

其中 $\theta \geqslant 0$ 表达了生育在家庭幸福中的地位.

不考虑生育对生产的直接影响，故设生产函数为通常的 $y = Ak$. 但生育与死亡都将影响到家庭预算，这就需要对通常的个体资本积累方程

$$\mathrm{d}k = \mathrm{d}y - \mathrm{d}c$$

作相应修改. 考虑以下三方面的变化.

(i) 以 p 记死亡率，则 $n - p$ 为人口增长率，因而家庭人均资本数要扣除 $(n-p)k$.

(ii) 在消费 c 中应加入抚育孩子的成本 $\alpha n y$，其中 $\alpha > 0$ 是外生参数，它表示抚育一个孩子的花费占收入 y 的份额，取决于社会习俗，一般说来并不是父母可随意选择的.

(iii) $\mathrm{d}y$ 中应包含一项正比于死亡率 p 的收入风险 $pk\mathrm{d}u$，$\mathrm{d}u$ 是外生 Brown 运动.

综合如上三方面的考虑，可写出个体预算约束为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}k &= [y - (n-p)k - \alpha n y - c]\mathrm{d}t + pk\mathrm{d}u \\ &= \{[A(1-\alpha n) - n + p]k - c\}\mathrm{d}t + pk\mathrm{d}u \\ &\triangleq (\eta k - c)\mathrm{d}t + pk\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

$$\eta = A + p - n(A\alpha + 1). \tag{19}$$

于是，生育决策问题可表为

$$\begin{cases} \max\limits_{c,n} \mathrm{E}_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t} U(c(t)n^\theta(t))\mathrm{d}t, & \text{(20a)} \\ \text{s.t.}\quad \mathrm{d}k = (\eta k - c)\mathrm{d}t + pk\mathrm{d}u, \quad k(0) = k_0. & \text{(20b)} \end{cases}$$

问题(20)是一个比较简单的最优化问题，它是自治的，但并非线性约束的.

问题(20)的最优性条件可标准地表述如下：

$$\begin{cases} \rho V = U + (\eta k - c)V_k + \dfrac{1}{2}p^2\sigma_u^2 k^2 V_{kk}, & \text{(21a)} \\ 0 = U' n^\theta - V_k, & \text{(21b)} \\ 0 = U' n^\theta \dfrac{c\theta}{n} - kV_k(A\alpha + 1). & \text{(21c)} \end{cases}$$

利用条件(21)与适当的宏观均衡条件，就可求出均衡生育率 n、均衡比率 $\mu = c/k$ 与均衡增长率 $\psi = \eta - \mu$.

B. 宏观均衡

设在宏观均衡时 n, μ 为常数，则问题(20)成为3.3.3C 所考虑的问题的特殊

情况，因而可直接套用那里的结论. 不过，我们还是直接利用条件(21)得出所要的结论. 设 $V = aU(k)$，则 $V_k = \sigma' V/k, V_{kk} = -\sigma\sigma' V/k^2$；以此代入方程组(21)得出关于 a, μ, n 的方程组为

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{\mu\,\sigma' n^{\theta\sigma'}}{a} + \sigma'(\eta - \mu) - \dfrac{p^2\sigma\,\sigma'\sigma_u^2}{2}, & (22a) \\ a = \mu^{-\sigma} n^{\theta\sigma'}, & (22b) \\ \mu\theta = n(A\alpha + 1), & (22c) \end{cases}$$

其中 η 依式(19). 从以上方程组容易解出

$$\mu = \frac{\rho}{q} + \frac{p^2\sigma\,\sigma'\sigma_u^2}{2q} - \frac{\sigma'(A+p)}{q}, \quad q = 1 - \bar{\theta}\sigma'; \tag{23}$$

$$n = \frac{\theta[2\rho + p^2\sigma\,\sigma'\sigma_u^2 - 2\sigma'(A+p)]}{2q(A\alpha+1)}. \tag{24}$$

结合式(19)与式(23)得均衡增长率

$$\psi = \eta - \mu = \frac{A+p}{q} - \frac{\bar{\theta}\rho}{q} - \frac{\bar{\theta}p^2\sigma\,\sigma'\sigma_u^2}{2q}. \tag{25}$$

自然要求 $\mu > 0$，由式(23)这相当于

$$\rho - \sigma'\left(A + p - \frac{p^2\sigma\,\sigma_u^2}{2}\right) > 0. \tag{26}$$

只要 σ_u^2 适当小，条件(26)必满足. 下面设条件(26)已被满足. 由式(22c)推出，当 $\theta > 0$ 时 $\mu > 0 \Leftrightarrow n > 0$. 显然 $n > 0$ 是必要的，故设 $\theta > 0$.

C. 参数的作用

依 $V = aU(k_0)$ 及式(22b)有

$$V = \frac{k_0^{\sigma'} n^{\theta\sigma'}}{\sigma'\mu^{\sigma}},$$

$$-\ln(\sigma' V) = \sigma\ln\mu - \theta\,\sigma'\ln n - \sigma'\ln k_0 \triangleq Q. \tag{27}$$

依次求出：

$$\frac{\partial\mu}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{\partial\mu}{\partial\theta} = \frac{\sigma'\mu}{q}, \quad q\frac{\partial\mu}{\partial p} = \sigma'(p\sigma\sigma_u^2 - 1); \qquad \text{(用式(23))}$$

$$\frac{\partial n}{\partial\alpha} = -\frac{An}{A\alpha+1}, \quad \frac{\partial n}{\partial\theta} = \frac{\sigma n}{q}, \quad \frac{\partial n}{\partial p} = \frac{\theta\sigma'(pa\sigma_u^2 - 1)}{q(A\alpha+1)}; \qquad \text{(用式(24))}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \sigma'\psi - \rho - \frac{p^2\sigma\sigma'\sigma_u^2}{2}, \quad q\frac{\partial\psi}{\partial p} = 1 - \bar{\theta}p\sigma\sigma'\sigma_u^2; \qquad \text{(用式(25))}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\alpha} = \frac{A\theta\sigma'}{A\alpha+1}, \quad \frac{\partial Q}{\partial\theta} = \sigma'\left(\frac{\sigma\theta'}{q} - \ln n\right), \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\sigma'(p\sigma\sigma_u^2 - 1)}{\mu}. \qquad \text{(用式(27))}$$

这就得出结论：n 与 α 负相关，与 θ 正相关，当 σ_u^2 充分小时亦与 p 正相关；ψ 与 α 无关，当 σ_u^2 充分小时与 θ 负相关，与 p 正相关；Q（因而 V）与 α, θ 负相关（注意 n 通常充分小），当 σ_u^2 充分小时与 p 正相关. 于是有以下结论.

命题 设产出的波动适当小,则有以下结论:

(i) 提高幼儿抚养费用(即提高 α),将降低生育率与福利水平,但不影响增长率;

(ii) 提高对生育的重视(即提高 θ),将提高生育率与福利水平,但降低增长率;

(iii) 延长寿命(即降低 p),将降低生育率、增长率与福利水平.

值得注意的是,长寿似乎既威胁经济增长,又威胁福利,看来是完全负面的,这不免悖于情理.问题在于,模型完全将寿命排除在效用函数之外;而实际上,长寿必然是福利目标之一,它不能从一个不完全的模型反映出来,是不足为怪的.

注意到 θ 对福利与增长率有相反的影响,自然提出求得某个最优值 θ^* 的问题,它从解如下最大化问题得出:

$$\max_{\theta}(\lambda Q + \lambda' \ln\psi),$$

$\lambda \in (0,1)$ 与 λ' 分别为福利与增长率的权重.由

$$0 = \frac{\partial}{\partial\theta}(\lambda Q + \lambda'\ln\psi) = \lambda\sigma'\left(\frac{\sigma\theta'}{q} - \ln n\right) + \frac{\lambda'}{q\psi}\left(\sigma'\psi - \rho - \frac{p^2\sigma\,\sigma'\sigma_u^2}{2}\right)$$

得出,我们所要的 $\theta = \theta^*$ 应从以下方程解出:

$$q\psi\left(\frac{\lambda\sigma\theta' + \lambda'}{q} - \lambda\ln n\right) = \lambda'\left(\frac{\rho}{\sigma'} + \frac{p^2\sigma\,\sigma_u^2}{2}\right), \tag{28}$$

其中 n,ψ 分别依式(24)、式(25).特别取 $\sigma_u^2 = 0$,式(28)简化为

$$(A + p - \bar{\theta}\rho)\left\{\frac{\lambda\sigma\theta' + \lambda'}{q} - \lambda\ln\frac{\theta[\rho - \sigma'(A + p)]}{q(A\alpha + 1)}\right\} = \frac{\lambda'\rho}{\sigma'}. \tag{28$'$}$$

由式(28)$'$仍然不能明显解出 θ.不过可以说明,在对 α,p 的适当限定下,方程(28)$'$存在唯一解 $\theta = \theta^* > 0$.无论 $\theta < \theta^*$(轻视生育)还是 $\theta > \theta^*$(过于看重生育),都不能最好地兼顾增长与福利,只有取 $\theta = \theta^*$,才是最佳选择.当然 θ^* 与 λ 有关.

4.8.3 贪污与廉政

贪污向来遭人唾骂,似乎是一种特殊的社会现象,应归入伦理学范畴,而非基于理性选择的决策模型所能描述.实际上,贪污仍然属于人类的理性行为,因而同样服从通常的决策规则.唯因如此,才可通过适当的政策措施对贪污加以约束与遏制.

A. 模型与最优性条件

处理贪污问题的一个关键思想是:贪污并不是个别蛀虫的一种疯狂行为,而是人人有可乘之机的一种制度漏洞.分别以 H 与 η 记社会与个体的贪污水平,

这意味着公共资源 $G = gK(g > 0)$ 中有一部分 $G_1 = HG$ 被贪污侵占，其中的 ηG 为某个代表性个体所贪污，$0 < H, \eta < 1$. 于是，仅有余下部分 $G_2 = G - G_1$ 作为公共开支，假定它兼具福利效应与生产效应（这与 4.2.4 中有所不同，意在简化分析）. 贪污者必定会因自己的非法行为而寝食难安，因而贪污有强烈的负效用. 因此我们将个体的期望折现效用表为

$$V = \mathrm{E}_0\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho t} U(c(t)[1-\eta(t)]^{\omega} G_2^{\theta}(t))\mathrm{d}t,$$

其中 $\omega > 0, \theta \geqslant 0$ 表示相应的权重. 注意 V 与 η, ω 均为负相关：贪污愈多，ω 愈大，贪污者的效用损失愈大.

贪污往往伴随着渎职，因而给生产带来损害. 下面给定的个体生产函数是 4.2节式(57)的一个修正：

$$y = A(k + \theta_2 G_2 - \theta_1 G_1), \tag{29}$$

其中权数 θ_1, θ_2 满足 $\theta_1, \theta_2 \geqslant 0$. 个体的确定性收入为 $y + \eta G$；个体的支出包括消费 c，对贪污的预期罚款为 $\beta\eta^2 G$. 罚款额与贪污数额 ηG 成正比，而比例系数 $\beta\eta$ 又与 η 成正比，这意味着贪欲越重，败露风险越大，一旦败露损失越惨. 系数 $\beta > 0$ 表达了惩贪的严厉程度. 这样，可将个体的资本积累表为[①]

$$\begin{cases} \mathrm{d}k = [y + (1-\beta\eta)\eta G - c]\mathrm{d}t + \eta y \mathrm{d}u_Y - \mathrm{d}G, \\ \mathrm{d}b = b\mathrm{d}R_b + \mathrm{d}G - \mathrm{d}T, \end{cases} \tag{30}$$

其中 $\mathrm{d}G = G\mathrm{d}t + HY\mathrm{d}u_G, \mathrm{d}R_b = r\mathrm{d}t + \mathrm{d}u_B$ 与 $\mathrm{d}T = \tau y \mathrm{d}t$ 有通常的意义，$\mathrm{d}u_G$ 与 $\mathrm{d}u_Y$ 是互不相关的外生 Brown 运动. 方程组(30)的详细写法为

$$\begin{cases} \mathrm{d}k = [y + (1-\beta\eta)\eta G - c - G]\mathrm{d}t + \eta y \mathrm{d}u_Y - HY\mathrm{d}u_G, \\ \mathrm{d}b = (br + G - \tau y)\mathrm{d}t + b\mathrm{d}u_B + HY\mathrm{d}u_G. \end{cases} \tag{30$'$}$$

令 $w = k + b = k/\nu$，则个体决策问题可表为

$$\begin{cases} \max\limits_{c,\nu,\eta} \mathrm{E}_0\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho t} U(c(t)[1-\eta(t)]^{\omega} G_2^{\theta}(t))\mathrm{d}t, & \text{(31a)} \\ \text{s.t.} \quad \mathrm{d}w = [\tau' y + br + (1-\beta\eta)\eta G - c]\mathrm{d}t + w\mathrm{d}u, \quad w(0) = w_0, & \text{(31b)} \end{cases}$$

其中

$$\mathrm{d}u = \nu' \mathrm{d}u_B + \eta(y/w)\mathrm{d}u_Y. \tag{32}$$

写出 Bellman 方程

$$\rho V = U + V_t + [\tau' y + br + \eta G(1-\beta\eta) - c]V_w + \frac{\sigma_u^2}{2} w^2 V_{ww},$$

然后可依标准方式写出最优性条件：

---

① 参看 p.285 的脚注①.

$$
\begin{cases}
0 = U'\eta'^{w}G_2^{\theta} - V_w, & (33a)\\
0 = -\dfrac{c}{\eta'}\dfrac{\omega}{}U'\eta'^{w}G_2^{\theta} + (1-2\beta\eta)GV_w + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial\eta}w^2V_{ww}, & (33b)\\
0 = (A\tau' - r)V_w + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial\nu}wV_{ww}, & (33c)\\
\rho V_w = (A\nu\tau' + \nu' r)V_w \\
\qquad + \left[\dfrac{\tau' y}{w} + \nu' r + (1-\beta\eta)\dfrac{\eta G}{w} - \mu + \sigma_u^2 + \dfrac{w}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial w}\right]wV_{ww} \\
\qquad + V_{tw} + \dfrac{\sigma_u^2}{2}w^2V_{www}, & (33d)
\end{cases}
$$

其中

$$\mu = c/w,$$

$$\sigma_u^2 = \nu'^2\sigma_B^2 + \frac{2\eta\,\nu'\,y}{w}\sigma_{BY} + \frac{\eta^2y^2}{w^2}\sigma_Y^2; \qquad \text{（依式(32)）}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial\eta} = \dfrac{\nu' y}{w}\sigma_{BY} + \dfrac{\eta y^2}{w^2}\sigma_Y^2,\\
\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial\nu} = -\nu'\sigma_B^2 - \dfrac{\eta y}{w}\sigma_{BY} + A\left(\eta\,\nu'\sigma_{BY} + \dfrac{\eta^2 y}{w}\sigma_Y^2\right),\\
\dfrac{w}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial w} = -\dfrac{\eta\,\nu'\,y}{w}\sigma_{BY} - \dfrac{\eta^2y^2}{w^2}\sigma_Y^2 + A\nu\left(\eta\,\nu'\sigma_{BY} + \dfrac{\eta^2 y}{w}\sigma_Y^2\right).
\end{cases} \qquad (34)
$$

B. 宏观均衡

如同通常一样，设在均衡时 $k=K, y=Y, \eta=H$，且 η,μ,ν 均为常数，则

$$G = gk,\quad G_1 = g\eta k,\quad G_2 = g\eta' k,$$

$$y = Bk,\quad B = A[1 + g\theta_2 - g\eta(\theta_1+\theta_2)]. \quad \text{（用式(29)）} \qquad (35)$$

依然用熟知的宏观均衡条件 $\mathrm{d}k/k = \mathrm{d}b/b$，并结合式(30)′得

$$
\begin{cases}
\psi = B - g + g\eta(1-\beta\eta) - \dfrac{\mu}{\nu} = r + \dfrac{\nu}{\nu'}(g - B\tau), & (36a)\\
\mathrm{d}u = B\eta(\mathrm{d}u_Y - \mathrm{d}u_G) = \mathrm{d}u_B + \dfrac{B\eta\nu}{\nu'}\mathrm{d}u_G, & (36b)
\end{cases}
$$

其中

$$\psi = \mathrm{E}[w^{-1}\mathrm{d}w/\mathrm{d}t].$$

由式(36b)推出

$$\nu'^2\sigma_B^2 = B^2\eta^2(\sigma_G^2 + \nu'^2\sigma_Y^2),$$

$$\sigma_{BY} = B\eta\sigma_Y^2,$$

$$\sigma_u^2 = B^2\eta^2\sigma_0^2,\quad \sigma_0^2 = \sigma_G^2 + \sigma_Y^2.$$

将以上结果代入方程组(34)得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial\eta}=B^2\eta\,\nu\sigma_Y^2,\\[2mm]\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial\nu}=-\dfrac{B^2\eta^2\sigma_G^2}{\nu'}-B(B-A)\eta^2\sigma_Y^2,\\[2mm]\dfrac{w}{2}\dfrac{\partial\sigma_u^2}{\partial w}=-B(B-A)\eta^2\nu\,\sigma_Y^2.\end{cases}\tag{34}'$$

如同在4.2.4小节中一样，设在均衡时 $V=aU(w^{\theta})$，则

$$wV_{ww}=-qV_w,\quad w^2V_{www}=q\bar{q}V_w,\quad q=1-\bar{\theta}\,\sigma'.$$

此外约定：

$$\begin{cases}\lambda=\tau'-B\eta^2q\,\sigma_Y^2,\\\phi=\lambda(B-A)+g\eta(1-\beta\eta).\end{cases}\tag{37}$$

在以上准备的基础上，由条件(33a)～条件(33d)、式(36a)依次得到：

$$a\bar{\theta}=\mu^{-\sigma}\eta'^{(\omega+\theta)\sigma'}(g\nu)^{\theta\sigma'};\tag{38}$$

$$\mu\omega=g\eta'\nu(1-2\beta\eta)-B^2\eta\eta'q\nu\sigma_Y^2;\tag{39}$$

$$\nu'r=A\lambda\nu'+B^2\eta^2q\sigma_0^2-B^2\eta^2q\nu\sigma_Y^2;$$

$$\begin{cases}\mu q=M+q\phi\nu,\\M=\rho-A\lambda q'-\dfrac{1}{2}B^2\eta^2qq'\sigma_0^2;\end{cases}\tag{40}$$

$$\begin{cases}\mu\nu'=\nu(N-\phi\nu),\\N=B-g+g\eta(1-\beta\eta)-A\lambda-B^2\eta^2q\,\sigma_0^2.\end{cases}\tag{41}$$

联立方程组(40)与方程组(41)解出

$$\begin{cases}\mu=DM/Fq,\quad\nu=M/F,\\D=M+qN,\quad F=D-q\phi.\end{cases}\tag{42}$$

将 $\mu/\nu=D/q$ 代入式(36a)得

$$\psi=B-g+g\eta(1-\beta\eta)-q^{-1}D.\tag{43}$$

形式上，式(42)、式(43)正好与式(15)、式(16)相同.但一个很大的区别是：此处的 μ,ν,ψ 并非最终结果，因其中含有待定的 η. η 就是贪污的均衡水平，它正是我们最关注的均衡值. 以 $\mu/\nu=D/q$ 代入式(39)，经整理后得

$$\begin{aligned}&g-g\eta(2\beta+1)+2\beta g\eta^2-B^2\eta\eta'q\sigma_Y^2\\&=\omega\left(\frac{\rho-A\tau'}{q}+B-g+g\eta-\beta g\eta^2+AB\eta^2\sigma_Y^2-\frac{1}{2}B^2\eta^2\bar{q}\sigma_0^2\right).\end{aligned}\tag{44}$$

注意到 B 是 η 的一次函数(依式(35))，方程(44)实际上是 η 的四次方程. 下面假定已适当限制参数，使得方程(44)有唯一解 $\eta\in(0,1/\beta)$. 限制 $\eta<1/\beta$ 是很自然的，因当 $\beta\eta\geqslant 1$ 时，贪污者无利可图，不再有贪污发生.

C. 参数对 η 的作用

现在考虑我们关注的中心问题：哪些因素影响贪污水平 η? 鉴于方程(44)的

复杂性，我们只能考虑一些比较便于分析的特殊情况. 首先设 $\theta_1 = \theta_2 = 0$，从而 $B = A$，于是方程(44)成为一个二次方程：

$$\begin{cases} m\eta^2 - n\eta + p = 0, \\ m = 2\beta g + A^2 q\,\sigma_Y^2 + R\omega, \quad R = \beta g + \dfrac{A^2}{2}(\bar{q}\sigma_G^2 - q'\sigma_Y^2), \\ n = g(2\beta + 1) + A^2 q\sigma_Y^2 + g\omega, \\ p = g - Q\omega, \quad Q = A - g + (\rho - A\tau')/q. \end{cases} \tag{45}$$

直接看出 $R > 0, m, n > 0$；通常 g 接近于 $A\tau$，至少不会大大超过 $A\tau$，故不妨设 $Q > 0$. 同时假定与 β, g, Q 相比，σ_0^2 是偏小的，这意味着产出与公共开支都只有轻度的波动. 至于表示贪污负效用权数的参数 ω，实际上难以确定，下面仅考虑两种极端情况：$\omega \approx 0$ 或者 ω 充分大，前者表示贪污者因自省而产生某种不安，这引起微小负效用；后者表示贪污者因强烈恐惧而引起严重负效用. 下面的分析表明，在这两种情况下，参数对 η 的影响是不同的.

(i) $\omega \approx 0$ 的情况. 此时

$$m \approx 2\beta g + A^2 q\,\sigma_Y^2, \quad n \approx m + g, \quad p \approx g,$$

因而方程(45)有两正根. 在 ω 甚小的情况下，要遏制贪污，β 不能太小，下面设 $2\beta \gg 1$（“$\gg$”表示**远大于**），从而 $n^2 \gg 4mp$. 于是方程(45)的较小的正根为

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2m}(n - \sqrt{n^2 - 4mp}) \\ &\approx \frac{1}{2m}\left[n - n\left(1 - \frac{4mp}{2n^2}\right)\right] \\ &= \frac{p}{n} \approx \frac{g}{g(2\beta + 1) + A^2 q\sigma_Y^2} \approx \frac{1}{2\beta + 1}, \end{aligned} \tag{46}$$

这表明 $\eta \ll 1/2, \beta\eta < 1$，贪污处于较低的水平. 由式(46)有

$$2m\eta - n = -\sqrt{n^2 - 4mp} < 0.$$

直接由方程(45)有

$$(2m\eta - n)\frac{s}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial s} = -s\left(\eta\frac{\partial m}{\partial s} - \frac{\partial n}{\partial s} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial s}\right), \tag{47}$$

其中 s 是 $\beta, g, \omega, \sigma_Y^2$ 之一. 分别算出

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m}{\partial \beta} = g(2 + \omega), \quad \dfrac{\partial m}{\partial g} = \beta(2 + \omega), \\ \dfrac{\partial m}{\partial \omega} = R, \quad \dfrac{\partial m}{\partial \sigma_Y^2} = A^2 q - \dfrac{A^2 q'\omega}{2}; \\ \dfrac{\partial n}{\partial \beta} = 2g, \quad \dfrac{\partial n}{\partial g} = 2\beta + \bar{\omega}, \quad \dfrac{\partial n}{\partial \omega} = g, \quad \dfrac{\partial n}{\partial \sigma_Y^2} = A^2 q; \\ \dfrac{\partial p}{\partial \beta} = 0, \quad \dfrac{\partial p}{\partial g} = \bar{\omega}, \quad \dfrac{\partial p}{\partial \omega} = -Q, \quad \dfrac{\partial p}{\partial \sigma_Y^2} = 0. \end{cases} \tag{48}$$

以上公式结合式(47)得出

$$(2m\eta - n)\frac{\beta}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta} = \beta\left(\frac{\partial n}{\partial \beta} - \eta\frac{\partial m}{\partial \beta}\right) = \beta[2g - g\eta(2+\omega)] \approx 2\beta g;$$

$$(2m\eta - n)\frac{g}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial g} = g\left(\frac{\partial n}{\partial g} - \eta\frac{\partial m}{\partial g} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial g}\right)$$
$$= g[2\beta + \overline{\omega} - \beta\eta(2+\omega) - \eta^{-1}\overline{\omega}] \approx -g;$$

$$(2m\eta - n)\frac{\sigma_Y^2}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial \sigma_Y^2} = \sigma_Y^2\left(\frac{\partial n}{\partial \sigma_Y^2} - \eta\frac{\partial m}{\partial \sigma_Y^2}\right)$$
$$= \sigma_Y^2[A^2 q - \eta(A^2 q - A^2 q'\omega/2)] \approx A^2 q\, \sigma_Y^2;$$

$$(2m\eta - n)\frac{\omega}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial \omega} = \omega\left(\frac{\partial n}{\partial \omega} - \eta\frac{\partial m}{\partial \omega} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial \omega}\right)$$
$$= \omega(g - \eta R + \eta^{-1}Q) \approx \omega\left(\frac{g}{2} + 2\beta Q\right).$$

以上结果表明，η 与 β,σ_Y^2,ω 负相关，与 g 正相关，η 关于 $\beta,g,\sigma_Y^2,\omega$ 的弹性依绝对值递减. 这就得出以下结论.

命题　设 θ_1,θ_2,ω 充分小，而 σ_Y^2 适度小，则抑制贪污的措施如下：加重罚款；降低公共开支；增大个体收入风险；促进贪污者自省. 以上措施的影响力依次递降：罚款的作用最大，而良心治疗(即加大 ω)则收效甚微.

(ii) ω 充分大的情况. 此时有

$$m \approx R\omega,\quad n \approx g\omega,\quad p \approx -Q\omega;$$

方程(45)仅有一个正根：

$$\eta = \frac{1}{2m}(n + \sqrt{n^2 - 4mp}) \tag{46'}$$
$$\approx \frac{1}{2R}(g + \sqrt{g^2 + 4QR}) \geqslant \frac{g}{R}.$$

这就表明，除非 Q 很小，$\beta\eta < 1$ 难以满足. 因此下面设 Q 充分小，而 β 适度大，从而 $\eta \approx g/R \approx 1/\beta \ll 1$. 依式(46)有 $2m\eta - n > 0$，然后用式(47)、式(48)得出

$$\begin{cases}(2m\eta - n)\dfrac{\beta}{\eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial \beta} = \beta[2g - g\eta(2+\omega)] \approx -g\omega,\\[2ex](2m\eta - n)\dfrac{g}{\eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial g} = g[2\beta + \overline{\omega} - \beta\eta(2+\omega) - \eta^{-1}\overline{\omega}] \approx -\beta g\omega,\\[2ex](2m\eta - n)\dfrac{\omega}{\eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial \omega} = \omega(g - \eta R + \eta^{-1}Q) \approx -\dfrac{\omega}{\beta}\cdot\dfrac{A^2}{2}(\overline{q}\sigma_G^2 - q'\sigma_Y^2),\\[2ex](2m\eta - n)\dfrac{\sigma_Y^2}{\eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial \sigma_Y^2} = \sigma_Y^2[A^2 q - \eta(A^2 q - A^2 q'\omega/2)] \approx \dfrac{\omega}{2\beta}A^2 q'\sigma_Y^2.\end{cases}$$

这表明 η 与 $g,\beta,\omega,\sigma_Y^2$ 均负相关，其弹性递降. 这得出与 $\omega \approx 0$ 时稍不同的结论如下.

命题 设 θ_1,θ_2,Q 充分小，σ_0^2 适度小，β 适度大，ω 充分大，则抑制贪污的措施依其影响力依次为：扩大公共开支；加重罚款；加大惩贪震慑力；增大个体收入风险.

D. 社会计划者决策

上面的模型考虑了贪污者在面对整肃风险时的决策行为，由此导出几种常见惩贪措施的有效性比较，这对于政策制定者不无启示. 但读者必定注意到，对于决策问题(31)，我们并未如通常一样作福利分析. 贪污者固然也是消费者的一部分，但毕竟是一类很特殊的消费者，他们所作的最优决策显然不足以说明一般消费者的福利，对于后者的分析应借助于代表性消费者决策或社会计划者决策来解决.

考虑如下的社会计划者决策问题：

$$\begin{cases} \max\limits_C \mathrm{E}_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}U(C(t)G^\theta(t))\mathrm{d}t \quad (\theta \geqslant 0), & (49\mathrm{a}) \\ \mathrm{s.\,t.}\ \mathrm{d}G = \delta Y\mathrm{d}t + G\mathrm{d}u_G, & (49\mathrm{b}) \\ \qquad \mathrm{d}K = (\tau' Y - C)\mathrm{d}t + K\mathrm{d}u_K. & (49\mathrm{c}) \end{cases}$$

记号 $C,K,Y,\mathrm{d}u_G,\mathrm{d}u_K,\tau$ 的意义是自明的，不必解释. 但与问题(31)不同，此处 G 并不表流动的公共开支，而是由公用事业投入累积而成的基础设施存量(或水平)，δY 则是单位时间内 G 的期望增量，$0<\delta<1$. 以 η 表社会贪污水平. 总税收 τY 除因贪污而损失的部分 ηY 之外，其余全部用于基础设施投入，因而 $\tau=\delta+\eta$，假定 τ 与 η 为外生常数. 式(49a)表明基础设施具有福利效应；另一方面 G 也有生产效应，即 G 进入生产函数

$$Y = AK^\alpha G^{\alpha'} \quad (A>0, 0<\alpha<1). \tag{50}$$

问题(49)是一个两状态变量的自治的随机最优化问题. 设 $V=V(G,K)$ 为其值函数，则(依 3.1 节式(46))

$$LV = \delta Y V_G + (\tau' Y - C)V_K + \frac{1}{2}(\sigma_G^2 G^2 V_{GG} + 2\sigma_{GK}GKV_{GK} + \sigma_K^2 K^2 V_{KK}), \tag{51}$$

而最优性条件可表为(依 3.3 节式(5))

$$\begin{cases} \rho V = U + LV, & (52\mathrm{a}) \\ 0 = U'G^\theta - V_K, & (52\mathrm{b}) \\ \rho V_G = U'C\theta G^{\theta-1} + (LV)_G, & (52\mathrm{c}) \\ \rho V_K = (LV)_K, & (52\mathrm{d}) \end{cases}$$

其中(用式(51))

$$(LV)_G = \frac{\alpha'\delta Y}{G}V_G + \delta Y V_{GG} + \frac{\alpha'\tau' Y}{G}V_K + (\tau' Y - C)V_{GK},$$

$(LV)_K$ 仿此，不必详细写出.

假定在均衡时有

$$\begin{cases} \mu \triangleq C/K \equiv \text{const}, \quad g \triangleq G/K \equiv \text{const}; & (53a) \\ \dfrac{\mathrm{d}G}{G} = \dfrac{\mathrm{d}K}{K}. & (53b) \end{cases}$$

由式(53a)有

$$Y/K = Ag^{\alpha'} \triangleq B, \quad \delta Y/G = B\delta/g \triangleq \psi; \tag{54}$$

这结合式(53b)与式(49b)、式(49c)得：

$$\begin{cases} \psi = B\tau' - \mu (\Leftrightarrow B\tau' = \mu + \psi), & (55a) \\ \mathrm{d}u_G = \mathrm{d}u_K, \quad \sigma_G^2 = \sigma_{GK} = \sigma_K^2. & (55b) \end{cases}$$

设 $V = aG^pK^q$，$a < 0$ 与 p, q 是待定参数；约定 $s = p + q$，$R = \rho + \dfrac{ss'\sigma_K^2}{2}$（参看4.3 节式(35)）. 以设定的 V 及式(53)～式(55)代入最优性条件(52)，经整理与适当化简之后得到

$$\begin{cases} R = \dfrac{\mu q}{\sigma'} + \psi s, \quad s = \bar{\theta}\sigma', & (52a)' \\ aq = \mu^{-\sigma} g^{\theta\sigma' - p}, & (52b)' \\ pR = \mu q(\alpha' + \theta) + \psi(ps + q - \alpha s), & (52c)' \\ qR = \alpha\mu q + \psi(\alpha s - qs'), & (52d)' \end{cases}$$

这些方程正可用来确定均衡值 g, μ 与参数 a, p, q.

首先，联立式(52c)′与式(52d)′消去 R 得到关于 q 的二次方程

$$\mu q^2 - q\sigma'(\alpha\mu - \psi) - \alpha\bar{\theta}\psi\sigma'^2 = 0,$$

由此解出（注意由式(52b)′应有 $q < 0$）

$$q = \frac{\sigma'}{2\mu}\left[\alpha\mu - \psi + \sqrt{(\alpha\mu - \psi)^2 + 4\alpha\bar{\theta}\mu\psi}\right] \triangleq q(g), \tag{56}$$

注意由式(54)与式(55a)，μ 与 ψ 都是 g 的函数. 将式(56)代入式(52a)′得到

$$R = \frac{1}{2}\left[\alpha\mu + (2s - 1)\psi + \sqrt{(\alpha\mu - \psi)^2 + 4\alpha\bar{\theta}\mu\psi}\right] \triangleq \varphi(g). \tag{57}$$

无需写出 $\varphi(g)$ 的详细表达式，利用式(54)、式(55a)与式(57)不难验证 $\varphi(0) = -\infty$，$\varphi(\infty) = \infty$，因而方程(57)必有解 $g > 0$. 确定一个这样的 g，则均衡值 μ, ψ 及参数 q, p 与 a（用式(54)、式(55a)及式(52b)′）亦随之确定. 假定模型参数所受的限制足以保证 $\mu > 0$.

若 $\theta = 0$（这意味着不考虑公共开支的福利效应），则依式(56)可算出 $q = \alpha\sigma'$，从而 $p = \sigma' - q = \alpha'\sigma'$（注意 $s = \sigma'$）；依式(57)有

$$\varphi(g) = \alpha\mu + \psi\sigma' = A\alpha\tau' g^{\alpha'} - A\delta g^{-\alpha}(\alpha - \sigma') \quad \text{（用式(54)、式(55a)）},$$

由此直接看出 $\varphi(0) = -\infty$，$\varphi(\infty) = \infty$，

$$\begin{cases}\varphi'(g) = A\alpha F g^{-\alpha-1} > 0 \quad (g > 0), \\ F = \alpha' g\tau' + \alpha\delta - \delta\sigma'.\end{cases} \tag{58}$$

因此方程 $R = \varphi(g)$ 有唯一解 $g > 0$.

今考虑参数 η, σ_K^2 对于均衡值 g, μ, ψ 及福利的影响. 为简单起见，仅考虑 $\theta = 0$ 的情况. 对方程 $R = \varphi(g)$ 用隐函数微分法得 $(\partial\varphi/\partial g = \varphi'(g)$ 依式(58))

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial \eta} = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta}\Big/\dfrac{\partial \varphi}{\partial g} = -\dfrac{g(\alpha - \sigma')}{\alpha F} < 0, & \text{(59a)} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \sigma_K^2} = \dfrac{\partial R}{\partial \sigma_K^2}\Big/\dfrac{\partial \varphi}{\partial g} = \dfrac{g^{\alpha'}\sigma\sigma'}{2A\alpha F} < 0. & \text{(59b)}\end{cases}$$

结合式(59)与

$$\psi = A\delta g^{-\alpha}, \quad \mu = A\tau' g^{\alpha'} - A\delta g^{-\alpha} \qquad (\text{用式(54)、式(55a)})$$

求出：

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -Ag^{-\alpha} - A\alpha\delta g^{-\alpha-1}\frac{\partial g}{\partial \eta}$$

$$= -\frac{A\alpha' g^{\alpha'}\tau'}{F} < 0, \qquad (\text{用式(59a)}) \tag{60a}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma_K^2} = -A\alpha\delta g^{-\alpha-1}\frac{\partial g}{\partial \sigma_K^2} > 0, \qquad (\text{用式(59b)}) \tag{60b}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \eta} = Ag^{-\alpha} + Ag^{-\alpha}(\alpha'\tau' + \alpha\delta g^{-1})\frac{\partial g}{\partial \eta} = \frac{A\alpha' g^{\alpha'}\sigma'\tau'}{\alpha F} < 0, \tag{61a}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \sigma_K^2} = Ag^{-\alpha}(\alpha'\tau' + \alpha\delta g^{-1})\frac{\partial g}{\partial \sigma_K^2} < 0. \tag{61b}$$

取定 $K_0 > 0$，令 $V = V(G_0, K_0)$，则

$$V = ag^{p}K_0^{\sigma'} = \frac{K_0^{\sigma'}}{\alpha\sigma'\mu^{\sigma}}, \qquad (\text{用式(52b)}')$$

$$-\ln(\alpha\sigma' V) = \sigma\ln\mu - \sigma'\ln K_0 \triangleq Q.$$

于是

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = \frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial \eta} < 0, \qquad (\text{用式(61a)})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_K^2} = \frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial \sigma_K^2} < 0. \qquad (\text{用式(61b)})$$

综合以上结论得出：g, ψ, V 都与 η 负相关；g, V 与 σ_K^2 负相关，而 ψ 与 σ_K^2 正相关. 这意味着，无论对于扩大基础设施投入比重、经济增长及消费者福利，贪污都是一种有害行为. 至于资本积累的风险，则如通常所见的，对于经济增长与福利分别有正面效应与负面效应.

4.8.4 国防开支

在政府公共开支中，国防预算处于很特殊的地位，对于它的最优决策无疑有

重要意义.下面给出的模型涉及含三个状态变量的随机最优决策,在方法上颇具典型意义.

A. 模型与最优性条件

就其本性而言,国防开支问题应归于4.2节中所讨论的公共开支这一大课题之内.不过,此处拟构建颇不同的模型.主要的区别是,此处考虑公共开支(包括国防开支)的累积效应,因而将公共开支当作**存量**(而不像在4.2节中一样当作**流量**)看待.其次,此处采用社会计划者决策,因而不必考虑外部性问题.

考虑一封闭的经济体.分别以 G 与 H 记其军备水平与基础设施水平,它们均用物质产品的实际量计量,与物质资本存量 K 处于某种对等地位. G,H 与 K 一样进入生产函数(对照式(50)):

$$Y = AK^{\alpha}G^{\beta}H^{\gamma} \quad (\alpha,\beta,\gamma > 0,\alpha + \beta + \gamma = 1). \tag{62}$$

对 G 出现于生产函数中可作如下解释.首先,国防技术对于推动民用部门发展有显著作用,这已为世界各国的经验所证实.其次,以军事实力为后盾的国际地位,对于维持经济发展所需要的稳定环境、保障外部资源供应以及坚定投资者信心,显然有不可忽视的作用.上述两方面作用的综合效果正体现于 G 对于产出的贡献率 β. β 也许不大(与 α 比较),但毕竟是正的.至于 G 与 H 的福利效应,则更无疑问.不过,为简单起见,此处仅考虑 G 的福利效用,它进入效用函数的形式类似于4.2.3小节:

$$V = \mathrm{E}_0\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho t}U(C(t)G^{\theta}(t))\mathrm{d}t \quad (\theta \geqslant 0).$$

需要强调的是,与4.2.5小节中的 G,H 不同,此处 G,H 是存量而非流量.进入生产函数与效用函数的应当是军备水平(或军备存量) G,而不仅仅是当年军费开支,其理由是显然易见的:安全保障来自国防建设的多年积累,而并非仅仅来自一时的投入.基础设施对于生产的作用亦是如此.正因为 G,H 是存量,如同 K 一样,需要用一定的增长方程来刻画其状态演化.下面设定方程(对照式(49b)、式(49c))为

$$\mathrm{d}G = \delta Y\mathrm{d}t + G\mathrm{d}u_G,$$

$$\mathrm{d}H = \varepsilon Y\mathrm{d}t + H\mathrm{d}u_H,$$

$$\mathrm{d}K = (\tau' Y - C)\mathrm{d}t + K\mathrm{d}u_K.$$

其中 $\delta,\varepsilon > 0$ 分别为国防开支与民用公共开支占有产出 Y 的份额,是主要的政策参数; τ 为税率.假定总税收 τY 全部用于国防开支与民用公共开支,因而 $\tau = \delta + \varepsilon$; εY 全部用于基础设施建设. $\mathrm{d}u_G,\mathrm{d}u_H,\mathrm{d}u_K$ 是反映 G,H,K 不确定性变化的Brown运动,受下面将给出的均衡条件的约束(见式(68b)).直观上很明显, G,H 如同 K 一样,都不可避免有一定折旧;但为简单起见,此处都不予考虑.

综上,可将涉及国防开支的最优决策问题表为

$$\begin{cases} \max\limits_{C} \mathrm{E}_0 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t} U(C(t)G^\theta(t))\mathrm{d}t, & (63\mathrm{a}) \\ \text{s.t.}\ \mathrm{d}G = \delta Y\mathrm{d}t + G\mathrm{d}u_G, & (63\mathrm{b}) \\ \quad \mathrm{d}H = \varepsilon Y\mathrm{d}t + H\mathrm{d}u_H, & (63\mathrm{c}) \\ \quad \mathrm{d}K = (\tau' Y - C)\mathrm{d}t + K\mathrm{d}u_K, & (63\mathrm{d}) \end{cases}$$

其中 Y 依式(62)，$G(0)=G_0, H(0)=H_0, K(0)=K_0$ 是给定的.

方程组(63)是一个自洽的随机最优化问题，其最优性条件是标准的. 但因有三个状态变量 G,H,K，故其 Bellman 方程颇为繁冗. 以 $V=V(G,H,K)$ 记问题(63)的值函数，则最优性条件可表为(用 3.3 节式(5))：

$$\begin{cases} \rho V = U + LV, & (64\mathrm{a}) \\ 0 = U'G^\theta - V_K & (64\mathrm{b}) \\ \rho V_G = U'C\theta G^{\theta-1} + (LV)_G, & (64\mathrm{c}) \\ \rho V_H = (LV)_H, & (64\mathrm{d}) \\ \rho V_K = (LV)_K, & (64\mathrm{e}) \end{cases}$$

其中
$$U = U(CG^\theta), \quad U' = (CG^\theta)^{-\sigma};$$

$$\begin{aligned} LV =& \delta YV_G + \varepsilon YV_H + (\tau' Y - C)V_K \\ &+ \frac{1}{2}(\sigma_G^2 G^2 V_{GG} + \sigma_H^2 H^2 V_{HH} + \sigma_K^2 K^2 V_{KK} \\ &+ 2\sigma_{GH} GHV_{GH} + 2\sigma_{GK} GKV_{GK} + 2\sigma_{HK} HKV_{HK}); \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} (LV)_G =& \frac{\beta\delta Y}{G}V_G + \delta YV_{GG} + \frac{\beta\varepsilon Y}{G}V_H + \varepsilon YV_{GH} + \frac{\beta\tau' Y}{G}V_K + (\tau Y - C)V_{GK} \\ &+ \frac{1}{2}(2\sigma_G^2 GV_{GG} + \sigma_G^2 G^2 V_{GGG} + \sigma_H^2 H^2 V_{GHH} + \sigma^2 K^2 V_{GKK} + 2\sigma_{GH} HV_{GH} \\ &+ 2\sigma_{GH} GHV_{GGH} + 2\sigma_{GK} KV_{GK} + 2\sigma_{GK} GKV_{GGK} + 2\sigma_{HK} HKV_{GHK}); \end{aligned}$$

$(LV)_H$ 与 $(LV)_K$ 有类似的表达式，不必一一写出.

B. 均衡

如通常一样，设定如下均衡条件：

$$\begin{cases} \mu \triangleq C/K \equiv \text{const}, \quad g \triangleq G/K \equiv \text{const}, \quad h \triangleq H/K \equiv \text{const}; & (66\mathrm{a}) \\ \dfrac{\mathrm{d}G}{G} = \dfrac{\mathrm{d}H}{H} = \dfrac{\mathrm{d}K}{K}. & (66\mathrm{b}) \end{cases}$$

以 $G=gK$ 与 $H=hK$ 代入式(49)得

$$Y/K = Ag^\beta h^\gamma \triangleq B, \quad Y = BK. \tag{67}$$

结合式(66b)与式(63b)～式(63d)、式(66a)、式(67)得

$$\frac{B\delta}{g}\mathrm{d}t + \mathrm{d}u_G = \frac{B\varepsilon}{h}\mathrm{d}t + \mathrm{d}u_H = (B\tau' - \mu)\mathrm{d}t + \mathrm{d}u_K,$$

由此得出

$$\begin{cases} \dfrac{B\delta}{g} = \dfrac{B\varepsilon}{h} = B\tau' - \mu \triangleq \psi, & (68a) \\ \mathrm{d}u_G = \mathrm{d}u_H = \mathrm{d}u_K. & (68b) \end{cases}$$

结合式(68a)与式(67)得

$$h = \frac{\varepsilon}{\delta}g, \quad B = A\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{\gamma} g^{\alpha'}, \quad \psi = A\delta^{\gamma'}\varepsilon^{\gamma} g^{-\alpha}, \quad \mu = B\tau' - \psi. \tag{69}$$

由式(68b)得 $\sigma_G^2 = \sigma_H^2 = \sigma_K^2 = \sigma_{GH} = \sigma_{GK} = \sigma_{HK}$.

设 $V = aG^pH^qK^r$，其中参数 $a < 0$ 与 p, q, r 待定，令 $s = p + q + r$，$R = \rho + \dfrac{ss'\sigma_K^2}{2}$. 将以上设定及式(66)～式(68)代入最优性条件(64)，利用式(65)，通过一些例行但颇烦琐的计算，可将式(64)化为

$$\begin{cases} R = \dfrac{\mu^{\sigma'} g^{\theta\sigma'-p} K^{\bar{\theta}\sigma'-s}}{a\sigma' h^q} + \psi s, & (70a) \\ ar = \mu^{-\sigma} g^{\theta\sigma'-p} h^{-q} K^{\bar{\theta}\sigma'-s}, & (70b) \\ R = \dfrac{\mu r(\beta+\theta)}{p} + \psi\left(\dfrac{\beta s}{p} - s'\right), & (70c) \\ R = \dfrac{\mu\gamma r}{q} + \psi\left(\dfrac{\gamma s}{q} - s'\right), & (70d) \\ R = \alpha\mu + \psi\left(\dfrac{\alpha s}{r} - s'\right). & (70e) \end{cases}$$

从式(70a)得 $s = \bar{\theta}\sigma'$，于是可将式(70a)与式(70b)简化为

$$\begin{cases} R = \dfrac{\mu r}{\sigma'} + \psi s, & (70a)' \\ ar = \mu^{-\sigma} g^{\theta\sigma'-p} h^{-q}. & (70b)' \end{cases}$$

这就得到5个方程：方程(70a)′、方程(70b)′与方程(70c)～方程(70d)，它们正好用来确定均衡值 μ, g 及参数 a, p, q（注意已有 $r = \bar{\theta}\sigma' - p - q$，$h = \varepsilon g/\delta$，$\psi = B\tau' - \mu$，参看式(69)）.

计算均衡值的方法颇类似于4.3.3小节中的做法：用待求的 g 表出诸均衡值，然后由某个关于 g 的方程确定 g. 首先联立方程(70c)～方程(70e)消去 R 得

$$\begin{cases} (\alpha p - \beta r)(\mu r + \psi s) = \theta\mu r^2, & (71a) \\ (\alpha q - \gamma r)(\mu r + \psi s) = 0. & (71b) \end{cases}$$

由方程组(71a)知 $\mu r + \psi s \neq 0$，因而由式(71b)有 $\alpha q = \gamma r$，于是

$$r = \frac{\alpha q}{\gamma}, \quad p = s - \frac{\beta' q}{\gamma}. \tag{72}$$

以此代入式(71a)，得到关于 q 的二次方程

$$\alpha\mu q^2 - q\gamma\sigma'(\alpha\mu - \psi) - \gamma^2\bar{\theta}\sigma'^2\psi = 0.$$

以上方程有一正根与一负根，而应有 $q, r < 0$（依式(70b)′），故解出

$$q = \frac{\gamma\sigma'}{2\alpha\mu}[\alpha\mu - \psi + \sqrt{(\alpha\mu - \psi)^2 + 4\alpha\bar{\theta}\mu\psi}] \triangleq q(g). \tag{73}$$

以此代入 $r = (\alpha/\gamma)q$ 得 $r = r(g)$，然后结合式(70b)′与式(69)得出 $a = a(g)$. 余下确定 g，这依赖于方程(70a)′：

$$R = \frac{1}{\sigma'}\mu(g)r(g) + \psi(g)\bar{\theta}\sigma' \triangleq \varphi(g), \tag{74}$$

其中 $\mu = \mu(g)$ 与 $\psi = \psi(g)$ 依式(69). 利用式(69)与式(73)，不难求得 $\varphi(g)$ 的明显表达式，但因其过繁而不便写出. 此处要紧的是，指明 $\varphi(0) = -\infty$，当 $\delta \ll \varepsilon$ 时 $\varphi(1) > 0$. 不妨设 ρ, σ_K^2 偏小，从而 $|R|$ 亦偏小，于是方程(74)存在解 $g \in (0,1)$. 将这样的解 g 代入 $q(g), \mu(g)$ 等，即可最终确定诸均衡值. $\mu > 0$ 对应着模型参数间的一定不等式关系，下面设这种关系已被满足.

在 $\theta = 0$ 这一特殊情况下，可得到较简单的公式. 首先，从式(73)得出 $q = \gamma\sigma'$，继而得 $r = \alpha\sigma', p = \beta\sigma'$ (用 $s = \sigma'$). 注意 p, q, r 均为负. 其次，依式(74)有

$$\begin{aligned}\varphi(g) &= \alpha\mu + \psi\sigma' = B\alpha\tau' - \psi(\alpha - \sigma') \\ &= A\alpha\tau'(\varepsilon/\delta)^\gamma g^\alpha - A\delta^\gamma\varepsilon^\gamma g^{-\alpha}(\alpha - \sigma'). \quad (\text{用式(69)})\end{aligned} \tag{74$'$}$$

由此直接看出

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= -\infty, \\ \varphi(1) &= A(\varepsilon/\delta)^\gamma(\alpha\tau' - \alpha\delta + \delta\sigma') > 0, \qquad (\delta\text{ 适当小}) \\ \varphi'(g) &= A\alpha\alpha'\tau'(\varepsilon/\delta)^\gamma g^{-\alpha} + A\alpha\delta^\gamma\varepsilon^\gamma g^{-\alpha-1}(\alpha - \sigma') \\ &= A\alpha(\varepsilon/\delta)^\gamma g^{-\alpha-1}F > 0,\ F = \alpha' g\tau' + \alpha\delta - \delta\sigma'.\end{aligned} \tag{75}$$

故当 $|R|$ 适当小时方程 $R = \varphi(g)$ 有唯一解 $g \in (0,1)$.

C. 参数的作用

任给模型参数 λ，为计算均衡值(例如 μ)对 λ 的导数，不免要求出 $\partial g/\partial\lambda$，而为此就必须利用式(74)或式(74)′求出 $\partial\varphi/\partial g$，但用式(74)来做到这一点并不容易. 因此，下面仅考虑 $\theta = 0$ 这一特殊情况，所得结论亦适用于 θ 非零但偏小的情况. 直观上，设定 θ 偏小似乎是可接受的. 为确定起见，下面仅考虑特别值得关注的参数 δ 与 σ_K^2，讨论这两个参数对于期望增长率 ψ 及消费者福利 V 的作用.

设 $\varphi = \varphi(g)$ 依式(74)，则由方程 $R = \varphi(g)$ 有

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial\delta} + \frac{\partial\varphi}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial\delta}, \quad \frac{\sigma\sigma'}{2} = \frac{\partial\varphi}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial\sigma_K^2},$$

$\partial\varphi/\partial g = \varphi'(g)$ 依式(75). 由以上两方程分别解出

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial\delta} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial\delta}\Big/\dfrac{\partial\varphi}{\partial g} = \dfrac{\gamma\tau'(g/\delta) + \gamma'(1 - \sigma'/\alpha)}{Fg^{-1}} > 0, \quad (\text{用式 75}) & (76\text{a}) \\ \dfrac{\partial g}{\partial\sigma_K^2} = \dfrac{\sigma\sigma'}{2}\Big/\dfrac{\partial\varphi}{\partial g} = \dfrac{\delta^\gamma g^{\alpha+1}\sigma\sigma'}{2\alpha\varepsilon^\gamma F} < 0. & (76\text{b})\end{cases}$$

然后结合式(76)与式(69)算出

$$\frac{\partial \psi}{\partial \delta} = \frac{\gamma' \psi}{\delta} - \frac{\alpha\psi}{g}\frac{\partial g}{\partial \delta} = \frac{\beta g \psi \tau'}{\delta F} > 0; \tag{77a}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma_K^2} = \frac{\partial \psi}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial \sigma_K^2} = -\frac{\alpha\psi}{g}\frac{\partial g}{\partial \sigma_K^2} > 0; \tag{77b}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mu}{\partial \delta} &= \frac{B\alpha'\tau'}{g}\frac{\partial g}{\partial \delta} - \frac{B\gamma\tau'}{\delta} - B - \frac{\partial \psi}{\partial \delta} \\ &= -\frac{g\psi[\alpha\delta + \alpha' g\tau' - \sigma'(\delta - \beta\tau'/\alpha)]}{\delta F};\end{aligned} \tag{78}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \sigma_K^2} = \frac{\partial \mu}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial \sigma_K^2} = \left(\frac{B\alpha'\tau'}{g} + \frac{\alpha\psi}{g}\right)\frac{\partial g}{\partial \sigma_K^2} < 0.$$

取定 $K_0 > 0$ 及 $G_0 = gK_0, H_0 = hK_0$，则

$$V \triangleq aG_0^p H_0^q K_0^r = ag^p h^q K_0^{\sigma'} = \frac{K_0^{\sigma'}}{\alpha\sigma'\mu^{\sigma}}; \qquad \text{(用式(70b)')}$$

$$-\ln(\alpha\sigma' V) = \sigma\ln\mu - \sigma'\ln K_0 \triangleq Q;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \delta} = \frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial \delta}; \tag{79}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_K^2} = \frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial \sigma_K^2} < 0. \tag{80}$$

现在来解释一下所得结果. 不等式(77a)与不等式(77b)表明，ψ 与 δ, σ_K^2 均为正相关，这意味着提高国防开支或加大市场风险均有利于经济增长. 直观上这是可理解的：提高 δ 将加快军备扩张，而在均衡时军备与整个经济是同步增长的. 不等式(80)表明，风险对于消费者福利有负面影响；这与风险对增长的影响恰好相反，这是我们已多次见到的. δ 对福利的影响要复杂些. 从式(78)看出，若 β（即使相对于 δ）偏小，则 $\partial\mu/\partial\delta < 0$，从而由式(79)有 $\partial Q/\partial\delta < 0$，于是加大国防开支对于福利有负面影响；若 β 适当大，则方程 $\partial\mu/\partial\delta = 0$ 可能有解 $\delta = \delta^*$，此时 δ^* 是国防开支的某种(对于福利而言)最优比率.

参考文献

[1] Acemoglu D, Verdier T. Property rights, corruption and the allocation of talent: a general equilibrium approach[J]. Eco. J., 1998, 108:1381-1403.

[2] Alfredo D M, Erasmo P. Public expenditure, corruption and economic growth[J]. European J. Political Eco., 2001, 17:1-16.

[3] Ammernesh D S. Expectations, life expectancy and economic behaviour [J]. Q. J. Eco., 1985, 100:389-408.

[4] Ana Balcao Reis. Endogenous growth and the possibility of eliminating

pollution[J]. J. Environ. Eco. Manag, 2001, 42: 360-373.

[5] Aronsson T. On cost benefit rules for green taxes[J]. Environ. Resource Eco., 1999, 13: 31-43.

[6] Barreto R A. Endogenous corruption in a neoclassical growth model[J]. European Eco. Rev., 2000, 44:35-60.

[7] Becker G S, Barro R J. A reformulation of the economic theory of fertility[J]. Q. J. Eco., 1988, 103:1-25.

[8] Becker G S, Glaeser E L, Murphy K M. Population and economic growth[J]. Amer. Eco. Rev., 1999, 89:145-149.

[9] Black D, Henderson V. A theory of urban growth[J]. J. Political Eco., 1999, 107:254-284.

[10] Blackburn K, Cipriami G P. A model of longevity fertility and growth [J]. J. Eco. Dyn. Control, 2002, 26:187-204.

[11] Bovenberg A L, de Mooij R A. Environmental tax reform and endogenous growth[J]. J. Publ. Eco., 1997, 63:207-237.

[12] Bobenberg A L, Smulders S. Transitional impacts of environmental policy in an endogenous growth model[J]. Intern. Eco. Rev., 1996, 37:861-892.

[13] Byrne M M. Is growth a dirty world? Pollution, abatement and endogenous growth[J]. J. Develop. Eco., 1997, 54:261-284.

[14] Celentani M, Ganuza J J. Corruption and competition in procurement [J]. European Eco. Rev., 2002, 46:1273-1303.

[15] Chen Jhyhwa, Lai Chingchang, Shieh Jhyyuan. Anticipated environmented policy and transitional dynamics in an endogenous growth model[J]. Environ. Resource Eco., 2003, 25:233-254.

[16] Corneo G, Jeanne O. Social organization in an endogenous growth model[J]. Intern. Eco. Rev., 1999, 40:711-725.

[17] Cropper M L, Oates W E. Environmental economics: a survey[J]. J. Eco. Literature, 1992, 30:675-740.

[18] Elliott K A, Rose-Ackerman S. Corruption and the Global Economy [R]. Washington DC.: Institute for Intern. Eco., 1997.

[19] Gong Lutang, Zou Hongfu. Military spending and stochastic growth [J]. J. Eco. Dyn. Control, 2003, 28:153-170.

[20] He Z. Corruption and anti-corruption in reform China[J]. Communist and Post-communist Studies, 2000, 33:243-270.

[21] Kort P M. Optimal investment policies for a polluting firm in an uncertainty environment[J]. European J. Oper. Research, 1995, 85: 82-96.

[22] Kort P M, Van Loon P J, Luptacik M. Optimal dynamic environmental policies of a profit maximizing firm[J]. J. Eco., 1991, 54:195-225.

[23] Kremer M. Population growth and technological change: one million B. C. to 1990[J]. Q. J. Eco., 1993, 108:681-716.

[24] Mauro P. Corruption and growth[J]. Q. J. Eco., 1995, 3:681-712.

[25] Mauro P. Corruption and the composition of government expenditure [J]. J. Publ. Eco., 1998, 69:263-279.

[26] Mo P H. Corruption and economic growth[J]. J. Comparative Eco., 2001, 29:66-79.

[27] Perry I W H. Optimal pollution taxes and endogenous technological progress[J]. Resource & Energy Eco., 1995, 17:69-85.

[28] Polinsky A M, Shavell S. Corruption and optimal law enforcement[J]. J. Publ. Eco., 2001, 81:1-24.

[29] Shleifer A, Vishny R W. Corruption[J]. Q. J. Eco., 1993, 108:599-617.

[30] Stock N L. Are there limits to growth[J]? Intern, Eco. Rev., 1998, 39:1-31.

[31] Strulik H. Demographic transition, stagnation and demoeconomic cycles in a model for the loss developed economy[J]. J. Monetary Eco., 1999, 21:397-413.

[32] Ventelou B. Corruption in a model of growth: political reputation, competition and shocks[J]. Publ. Choices, 2002, 110:23-40.

[33] Xavier M P. Longer lives, fertility, and accumulation[J]. Eco. Letters, 2003, 80:175-180.

[34] 闫伟.国有企业经理道德风险程度的决定因素[J].经济研究,1999,2:3-12.

[35] 杨灿明,赵福军.行政腐败的宏观经济学分析[J].经济研究,2004,9:101-109.

[36] Zhang Jie, Zhang Junsen. Longevite and economic growth in a dynastic famity model with an annuity market[J]. Eco. Letters, 2001, 72:269-277.

[General Information]
书名=宏观经济的随机模型
作者=胡适耕著
页数=307
SS号=11727339
DX号=
出版日期=2006年5月
出版社=华中科技大学出版社

封面
书名
版权
前言
目录
记号与约定
第1章　不确定性下的选择
1.1　状态偏好分析
1.2　风险投资
1.3　劳动合同
第2章　离散时间随机模型
2.1　随机序列
2.2　差分方程
2.3　消费
2.4　税收与政府开支
2.5　投资
第3章　随机分析初步
3.1　随机微积分
3.2　随机微分方程
3.3　随机最优化
第4章　连续时间随机模型
4.1　经济增长
4.2　消费优化与财政政策
4.3　教育·人力资本与技术
4.4　投资
4.5　货币的介入
4.6　小型开放经济
4.7　就业与劳务市场
4.8　其他问题